APÊNDICE A - PRODUTO

LIÇÕES DE CÁLCULO PARA O ESTUDO DE INTEGRAIS: um foco no uso de exemplos

Sebastião Leônidas Ferreira
Maria Clara Rezende Frota

PUC-MG
Belo Horizonte - 2012

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Este trabalho é um extrato da dissertação de mestrado intitulada "Lições de Cálculo com um foco no uso de exemplos para aprendizagem de Integrais", desenvolvida por Sebastião Leônidas Ferreira, sob a orientação da professora Dra. Maria Clara Rezende Frota e defendida no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

As lições de Cálculo abordam o estudo das técnicas de integração por substituição simples e a integração por partes. As lições introduzem as integrais indefinidas e definidas, o Teorema Fundamental do Cálculo e algumas aplicações das integrais definidas ao cálculo de áreas e volumes.

As lições foram desenhadas objetivando o uso de exemplos para proporcionar situações de ensino que possam promover o aprendizado conceitual e procedimental de tópicos de Cálculo Integral. As diversas atividades propostas buscam apresentar conceitos e procedimentos através de exemplos, que são sistematizados após um processo de reflexão do qual participam os alunos e o professor.

Esperamos que este texto possa ser útil para professores e para alunos de cursos de engenharia e de outros cursos de graduação no estudo inicial das integrais.

2 REFERENCIAIS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Quando elaboramos as Lições de Cálculo, para discutirmos um determinado conteúdo, não queremos apenas fazer uma exposição de conceitos e procedimentos, transmitindo aos nossos alunos informações; pretendemos torná-los capazes de fazer novas descobertas. Nossas lições devem promover o crescimento dos alunos, sua criatividade, capacidade de descoberta e adaptação. Entendemos que as lições são importantes, desempenhando um papel regulador no processo de ensino-aprendizagem.

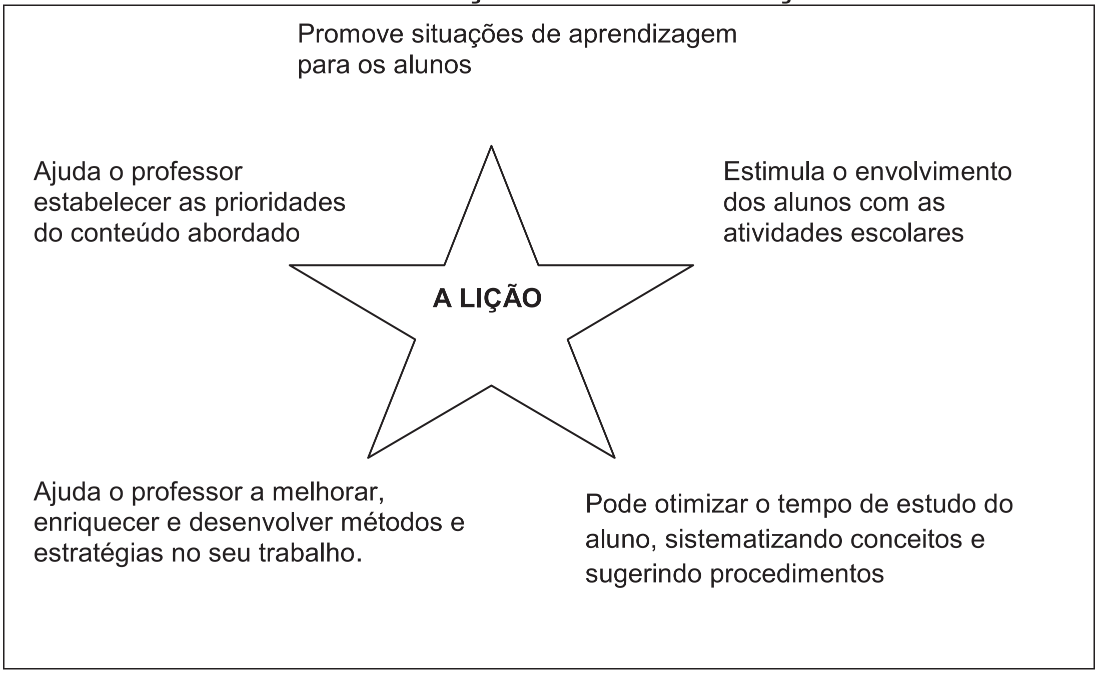
Um planejamento cuidadoso é um grande passo para o sucesso de uma lição. Ao planejar uma lição, o professor deve entender que ela será o caminho para a aprendizagem dentro ou fora da sala de aula, procurando não desperdiçar tempo em questões que poderão não contribuir com a aprendizagem, ou até mesmo prejudicar o entendimento dos alunos. No planejamento devemos considerar os objetivos, selecionando os métodos e procedimentos que ajudam na execução e avaliação da lição considerando os objetivos pretendidos.

Sabendo da importância de uma lição no processo de ensino-aprendizagem, consideramos que esta deve contemplar três pontos fundamentais: conteúdo, aluno e objetivos.

No conteúdo focalizamos o assunto a ser abordado com os alunos que são aqueles sujeitos que ativamente participarão da lição. O professor é um coparticipante, que acompanha e faz intervenções, sempre que forem necessárias. Algumas lições são preparadas para que, inicialmente, apenas o aluno a execute, e, posteriormente à execução, o professor possa socializar as discussões, abordando dúvidas e observações que surgiram durante a execução da lição. Nestas lições, o aluno é o principal sujeito; o professor poderá atuar retirando dúvidas e apontando resultados importantes pretendidos com a lição. Em relação aos objetivos da lição, entendemos que devemos especificar o que é esperado durante e após sua execução, estando atentos às observações e dúvidas evidenciadas. Isto poderá facilitar uma socialização posteriormente, abordando os principais pontos pretendidos e às vezes não alcançados pelo coletivo da turma.

Uma lição apresenta contribuições importantes no processo de aprendizagem; ao ser um instrumento de ajuda para o professor, acarreta reflexos positivos para os alunos.

Quadro 1 - A lição e suas contribuições



Fonte: Elaborado pelo autor

Estamos certos que um planejamento prévio, selecionando exemplos, com objetivos de desenvolver procedimentos e a reflexão sobre estes procedimentos, promove situações que favorecem discussões conceituais. A lição pode desempenhar o papel de introduzir, ampliar, esclarecer, sistematizar, desafiar e diagnosticar conhecimentos, sejam procedimentais ou conceituais.

2.1 Conhecimento conceitual e procedimental

Nosso desejo como professores de matemática é que os alunos apresentem uma compreensão conceitual da Matemática e sejam competentes ao desenvolverem os procedimentos corretamente quando necessário.

Hiebert e Lefevre (1986) caracterizam o conhecimento conceitual como aquele que é parte de uma rede composta por peças individuais de informação e as relações entre estas peças. Já se referindo aos conhecimentos processuais, definem que esses incluem uma familiaridade com o sistema de representação de símbolos da matemática e os conhecimentos de regras e procedimentos para a resolução de exercícios de matemática.

O conhecimento processual pode ou não ser aprendido de forma significativa, porém, o conhecimento conceitual é sempre aprendido com significado. (HIEBERT;

LEFEVRE, 1986)

Skemp, classifica o conhecimento em conhecimento relacional e conhecimento instrumental. De acordo com ele, a Matemática envolve uma extensa hierarquia de conceitos, nós não podemos formar qualquer conceito específico até que tenhamos formado todos aqueles que dele dependem. (SKEMP, 1976).

Conhecimento instrumental, é a capacidade de aplicar uma regra apropriada para a solução de um problema sem saber a razão pela qual a regra funciona. Em outras palavras, saber "como", mas não saber "por quê". Este conhecimento, geralmente requer não só o conhecimento dos objetos, mas também do formato e da representação simbólica relacionada. Além disso, muitas vezes exige execução de algoritmos, que às vezes são executados inconscientemente. (SKEMP, 1976).

Já o conhecimento relacional está associado à capacidade de saber o "porquê". Compreender os motivos pelos quais aplicamos determinados procedimentos e perceber outras possibilidades. Quando o aluno é capaz de relacionar e reorganizar conceitos, podendo deduzir outras possibilidades para os conceitos e procedimentos aprendidos, dizemos que houve a compreensão conceitual.

Para exemplificarmos o conhecimento conceitual, suponhamos duas funções f e g, com f(x)>g(x) num intervalo [a,b]. O aluno ao entender que a integral $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$, poderá ser interpretada como a área da região compreendida entre as duas curvas representadas pelas funções y=f(x) e y=g(x) no intervalo [a,b] demonstra uma compreensão conceitual. Demonstra ter compreendido que essa área corresponde à soma das áreas de todos os infinitos retângulos introduzidos no intervalo de a até b, entendendo que a base de cada retângulo é representada por um valor infinitamente pequeno dx e a altura representada pela diferença f(x)-g(x). O conhecimento procedimental corresponderia à execução dos procedimentos, escolhendo a técnica de integração e fazendo os desenvolvimentos algébricos.

É compreensível o desejo dos professores de que seus alunos equilibrem os dois tipos de conhecimentos. O aprendizado procedimental sem o conhecimento conceitual não fornece aos alunos a capacidade de extrapolar suas conclusões a respeito do poder das integrais. Já o aprendizado conceitual poderá mostrar para os alunos que outras aplicações semelhantes à utilizada para o cálculo de áreas usando o conceito de soma infinita poderão surgir, como a utilização das integrais para o cálculo de volumes, comprimento de arcos, etc.

2.2 O papel dos exemplos em matemática

Qual o papel representado pelo uso de exemplos no ensino de Matemática? Consideramos que o uso de exemplos é fundamental no processo de ensino aprendizagem de Matemática, em particular de Cálculo Diferencial e Integral.

Concordamos com Figueiredo, Contreras e Blanco (2006, p.31), que afirmam que “os alunos aprendem matemática mais pelo envolvimento com exemplos do que através de definições formais.”

Através de nossa experiência acadêmica, é comum ouvirmos durante nossas aulas, após a exposição de determinadas definições o aluno propondo; "professor dê um exemplo". Percebemos muitas vezes que esse pedido visa esclarecer melhor o que não foi assimilado ou confirmar suas conclusões, tornando as definições e conceitos, mais próximos e palpáveis ao aluno.

Figueiredo, Contreras e Blanco, (2009), fundamentados em Goldenberg e Mason (2008), afirmam que aprender mais sobre um determinado tópico é evoluir para exemplos mais avançados e construções mais avançadas para esses exemplos. Ensinar eficientemente inclui o uso de atividades e interações através das quais os alunos melhoram os acessos aos exemplos.

Watson e Mason propõem que os exemplos constituem elementos de espaços estruturados. Os autores usam o termo espaço de exemplos para denominar esse espaço. Para eles a extensão e exploração de espaços de exemplos são essenciais em matemática.

> Aprender matemática consiste em explorar, rearranjar e estender espaços de exemplos e as relações entre eles e dentro deles. Desenvolvendo uma familiaridade com esses espaços, os estudantes podem ganhar fluência e facilidade em associar técnicas e discursos. Experienciando extensões de seu espaço de exemplos (se bem orientado) contribui para a flexibilidade de pensamento não apenas em matemática, mas, talvez, de modo mais geral, e isso fortalece a apreciação e adoção de novos conceitos. (WATSON; MASON, 2005, p.6, tradução nossa)[16].

[16] Learning mathematics consists of exploring, rearranging, and extending example spaces and the relationships between and within them. Through developing familiarity with those spaces, learners can

Consideramos que o professor deverá apresentar uma grande variedade de exemplos que deverão contemplar diferentes abordagens de forma a atender as necessidades dos alunos, promovendo circunstâncias de aprendizagem. A utilidade de um exemplo dependerá de diversos fatores. A forma como o professor apresenta um exemplo e as características desse exemplo podem fazer a diferença entre um exemplo bem compreendido e útil e, apenas, mais um outro exemplo (FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Cabe destacar que a aprendizagem Matemática não é uma tarefa fácil, necessitando dedicação e estudo. À medida que o aluno vai evoluindo através da discussão e estudo dos exemplos, definições e procedimentos podem ser esclarecidos e reformulados.

Nossas leituras e investigações sobre os tipos de exemplos e sua função possibilitaram propor categorias que buscam contemplar os tipos de exemplos com os quais lidamos na sala de aula e que julgamos adequada para a elaboração das Lições de Cálculo Integral que integraram a pesquisa desenvolvida e que integram este texto.

2.3 Uma proposta de classificação de exemplos

Após um estudo de diversos trabalhos envolvendo o uso, a construção e as contribuições possíveis dos exemplos na aprendizagem de Matemática, procuramos elaborar uma classificação que, julgamos ser objetiva e clara em relação às atribuições e objetivos que desejamos ao elaborar um exemplo como parte integrante de lições que objetivam o ensino de Cálculo Integral.

Essa classificação compreende seis categorias de exemplos: introdutórios, ampliadores, sistematizadores, retificadores, desafiadores e diagnosticadores.

2.3.1 Exemplos introdutórios

São exemplos usados para introduzir conceitos e/ou procedimentos. Equivalem aos exemplos iniciais. (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO;

---

gain fluency and facility in associated techniques and discourse. Experiencing extensions of your example spaces (if sensitively guided) contributes to flexibility in thinking not just within mathematics but perhaps even more generally, and it empowers the appreciation and adoption of new concepts.

BLANCO; CONTRERAS, 2009). Normalmente são de fácil entendimento e sem grandes dificuldades, sendo usados nas primeiras explicações. Envolvem regras e procedimentos básicos.

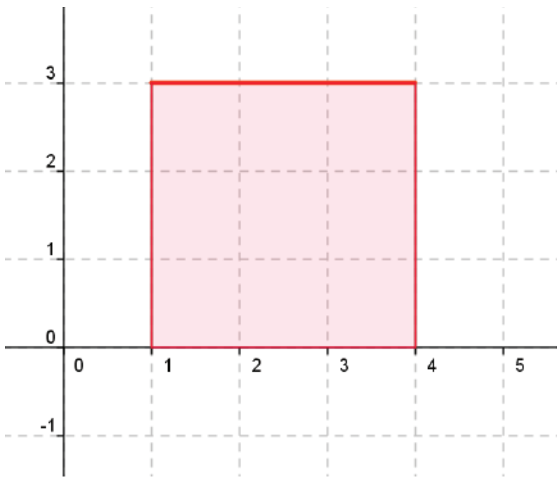
O exemplo ilustrado na Figura 1 pode ser considerado como introdutório.

Notemos que o exemplo da Figura 1 pode ser usado para introduzir conceitos e procedimentos usados para calcular áreas através de integral. O aluno poderá relacionar a representação simbólica da integral definida e rapidamente perceberá a eficiência do processo que poderá ser estendido a outras representações mais complexas.

Figura 1 - Exemplo Introdutório

A representação gráfica seguinte refere-se à região plana delimitada por f(x)= 3, x=1 e x=4.

Calculando a integral definida $I = \int_1^4 3dx$ obtemos: $\int_1^4 3dx = 3x\Big]_1^4 = 3(4-1) = 9$



a) Que relação existe entre o valor da integral calculada e o valor da área do retângulo sombreado?

b) Observe os contornos do retângulo e os limites de integração da integral e descreva suas observações.

Fonte: Elaborada pelo autor

2.3.2 Exemplos ampliadores

São aqueles que dão seguimento à apresentação dos conceitos e procedimentos feita através de exemplos introdutórios. Evoluem quanto ao nível de complexidade; apresentam procedimentos mais complexos e exigem recursos normalmente não necessários em exemplos introdutórios. Esses exemplos desempenham o papel de ampliar os conhecimentos dos alunos, propondo situações de conflitos que, gradativamente conduzem o aprendiz a níveis mais complexos, levando o aluno a reformular seus conceitos e procedimentos. Podem ser comparados aos exemplos de referência. (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Propor primeiramente ao aluno que faça a representação gráfica de uma função *f(x)=x* e que use uma integral para representar e calcular a área da região limitada, por *y=x, o eixo x, x=1 e x=3*. Em seguida, pedir que calcule a área limitada, *por y=x, y=-1, x=1 e x=3.* O aluno perceberá que a área não será a mesma, necessitando uma reformulação de procedimentos; percebendo as variações ele retomará suas conclusões e ampliará seus modelos.

2.3.3 Exemplos retificadores

São exemplos que exibem situações conflitantes que aparecem frequentemente após a introdução de conceitos e procedimentos. Discutem possíveis interpretações equivocadas de conceitos e procedimentos adotados nas resoluções. Esta classificação contempla os contraexemplos adotados por Rissland-Michener (RISSLAND-MICHENER apud FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009).

Para melhor compreendermos o papel dos exemplos retificadores, após uma primeira abordagem sobre a operação de integração como operação inversa da derivação e apresentando a integral indefinida do tipo $\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ [17], frequentemente os alunos ao integrarem uma função do tipo $\int \operatorname{sen} x dx$, apontam como respostas funções do tipo $\operatorname{sen} x^2$. Percebemos facilmente que houve uma

[17] Essa fórmula permanece válida para n real diferente de -1. (THOMAS, 2002, p.329).

associação indevida com a fórmula de integração de potências: a ideia de somar ao expoente de x uma unidade. O professor poderá apontar tal solução e pedir ao aluno que identifique qual o erro cometido, antecipando situações que poderão surgir posteriormente.

Esses exemplos podem otimizar o aprendizado, uma vez que, apontando e discutindo procedimentos e interpretações erradas que surgem durante as leituras e aplicação de conceitos. Esses exemplos antecipam dúvidas que podem surgir individualmente ou coletivamente.

É evidente que a ampliação do espaço de exemplos por um professor depende muito da sua experiência profissional, observação e interesse em detectar as interpretações erradas que podem e surgem com mais frequência.

2.3.4 Exemplos sistematizadores

São exemplos que resgatam e sistematizam importantes conclusões acerca das definições e procedimentos, frequentemente utilizados. Desempenham papel semelhante ao dos exemplos modelos. Normalmente são teóricos. Podem ou não anteceder outros exemplos. Após um primeiro contato com um determinado assunto, o professor poderá apresentar tais exemplos como forma de sistematizar as ideias gerais. A construção de uma tabela contendo as regras básicas de integração a partir das regras de derivação constitui um exemplo sistematizador, uma vez que resgata o conceito de integração como operação inversa da derivação.

2.3.5 Exemplos desafiadores

São exemplos que, para a sua execução, lançamos mão de diversos conhecimentos acumulados nos exemplos introdutórios, exemplos ampliadores e exemplos retificadores. Normalmente articulam diversos conhecimentos e procedimentos desenvolvidos pelo estudante nos vários conteúdos já estudados.

Para exemplificar podemos apontar algumas integrais envolvendo funções trigonométricas. Em algumas delas o aluno necessita aplicar recursos diversos como fatoração, arco duplo ou arco metade, identidades trigonométricas etc. Ex.: Calcular $\int 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$. O desafio consiste na busca que terá de ser feita pelo aluno, pesquisando entre as identidades trigonométricas aquela que é adequada para transformar $sen^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ e então integrar.

2.3.6 Exemplos diagnosticadores

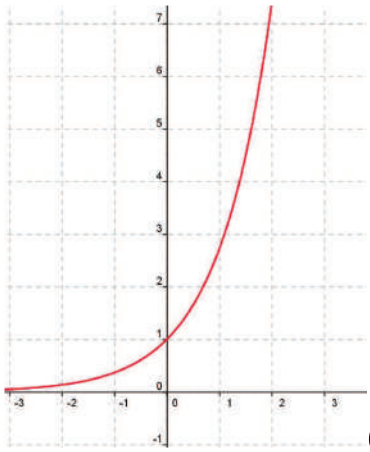
Consideramos exemplos diagnosticadores aqueles que usamos para diagnosticar as ideias prévias dos alunos sobre um conteúdo matemático, ou conceito já estudado. Podemos usar os exemplos diagnosticadores pretendendo uma verificação à priori; objetivamos, assim, um diagnóstico antecipado, para elaborar intervenções pedagógicas posteriores. Exemplos diagnosticadores estão sempre presentes em avaliações feitas individualmente ou em grupos, quando queremos verificar a compreensão por parte dos estudantes sobre os principais pontos dos conteúdos estudados.

Figura 2 - Exemplo diagnosticador

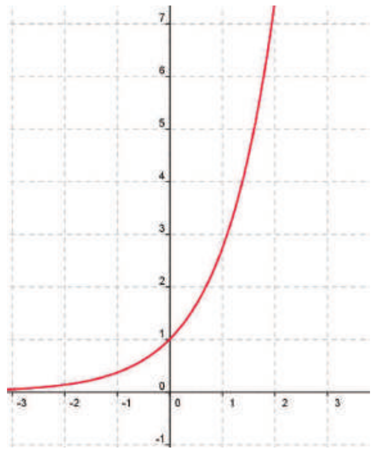
Dada a representação gráfica de $y=e^x$, faça o que se pede:

a) Destaque no gráfico a região cuja área será calculada ao resolvermos a integral definida $I_1=\int_{-1}^{2} e^x dx$, em seguida, calcule esse valor.

b) Represente graficamente a região cuja área é dada pela integral definida $I_2=\int_{0}^{2} [e^x - 1] dx$.



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pelo autor

É importante ressaltar, que um exemplo poderá ser ao mesmo tempo introdutório e sistematizador, pois, poderá desempenhar as duas ou até mais função. Assim, uma classificação como exemplo inicial não o impedirá de ser classificado como sistematizador etc.

Estamos certos das contribuições que os exemplos podem desempenhar na aprendizagem. Entretanto, vale lembrar que a exposição de exemplos, mal conduzidos pelo professor, poderá criar concepções erradas, causando consequências desastrosas para o aprendizado. A transmissão de informações para a construção conhecimentos, por parte do professor, requer todo cuidado (FIGUEIREDO; BLANCO; CONTRERAS, 2006).

3 PROPOSTA DE DESENVOLVIMETO

Sugerimos, de modo geral, que as lições desenvolvam-se através de uma abordagem que compreenda duas etapas:

teórica, através da exposição de slides contendo um resumo teórico dos conceitos e procedimentos básicos de cada tópico a ser estudado, sendo conduzida pelo professor em conjunto com os alunos;

prática, momento que as equipes, em duplas, executem as lições que foram preparadas objetivando complementar a abordagem teórica, exercitando e ampliando os conceitos e procedimentos apresentados na primeira abordagem.

O trabalho em dupla pode desempenhar um importante papel no desenvolvimento das lições. Os alunos ao se envolverem nas discussões deixam o papel de ouvinte para assumir o papel ativo no processo. A exposição de suas dúvidas e conjecturas pode promover o desenvolvimento da argumentação lógica de suas dúvidas e conclusões.

A elaboração das lições proporciona ao professor possibilidades de refletir e pensar sobre suas abordagens, antecipando e direcionando discussões, objetivando alcançar o entendimento necessário. Entendemos que é fundamental que o professor esteja atento durante a execução das lições, pois, ocorrerão resultados previsíveis e não previsíveis, podendo os alunos atingir ou não os objetivos pretendidos. Assim, se o papel dos exemplos não for alcançado, o professor deverá alertar sobre esses objetivos, assim como perceber quando um exemplo pode não ter sido o mais adequado.

4 AS LIÇÕES

Apresentamos as lições de Cálculo que foram elaboradas e desenvolvidas com alunos de Engenharia de uma instituição particular de Ensino Superior do interior do Estado de Minas Gerais. As lições foram desenhadas de forma a focalizar o uso e produção de exemplos, visando a facilitar o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Integral.

Para cada lição são estabelecidos os objetivos e apresentados os diversos exemplos, de acordo com as categorias por nós definidas e apresentadas no Capítulo 2, a partir dos estudos teóricos que foram conduzidos.

Procuramos adequar as lições às expectativas dos cursos objetivando trabalhar conceitos e procedimentos atendendo a um público que apresenta dificuldades diversas, como falta de pré-requisitos, pouco tempo disponível para os estudos, entre outras.

No processo de ensino e aprendizagem, consideramos professor e aluno como sujeitos ativos, cada um com seu papel. O professor estimula a aprendizagem, criando situações que possibilitem ao aluno o entendimento necessário. As lições desenvolvidas buscam fornecer elementos para o professor, que precisará ter cuidados com a forma de conduzi-las. A empatia e a confiança no professor poderão contribuir para que o ambiente de aprendizagem seja adequado aos estudos. Dos alunos esperamos o comprometimento com os estudos, dedicando-se sempre que possível às leituras, sejam dos slides, livros recomendados, formar grupos de estudos para discussão dos conteúdos estudados e principalmente a participação durante as aulas.

4.1 Lição 1: Ideias gerais sobre a Antiderivação como operação inversa da Derivação

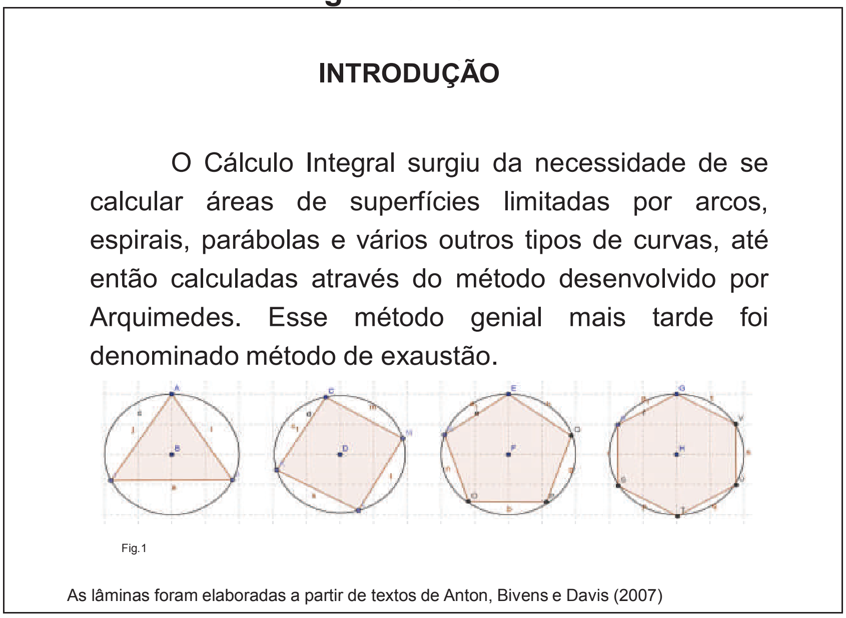
A Lição 1 apresenta rapidamente o método da exaustão de Arquimedes, e, representando os grandes nomes da História da Matemática que contribuíram para a construção e evolução do cálculo, cita Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Von Leibniz, com o intuito de mostrar aos alunos que, muitas vezes, os conhecimentos são construídos a partir de outros já existentes e em resposta a demandas de uma época. No caso das integrais, o problema prático era o de determinar a área de terrenos.

A matemática envolve uma extensa hierarquia de conceitos. Historicamente foi preciso tempo e esforço até que fossem estabelecidos todos os conceitos matemáticos relacionados ao cálculo de áreas: a derivada, a integral, uma relação entre as duas operações, como sendo uma a inversa da outra. (SKEMP, 1976).

O conhecimento processual pode ou não ser aprendido de forma significativa, porém, o conhecimento conceitual é sempre aprendido com significado, assim, procuramos dar sentido às ideias básicas de integração, objetivando contribuir para o conhecimento processual e conceitual. (HIEBERT; LEFEVRE, 1986),

O slide da Figura 3 teve o objetivo de motivar as primeiras colocações históricas sobre o problema.

Figura 3 - Slide 1

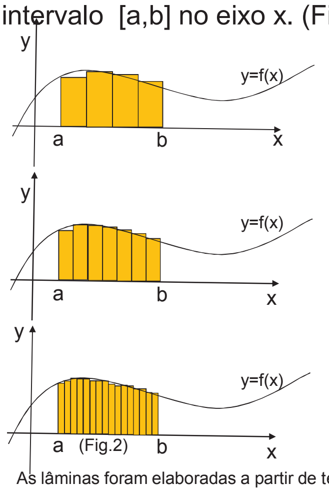


Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4 - Slide 2

O PROBLEMA DA ÁREA

Dada uma função f contínua e não-negativa em um intervalo [a,b], encontre a área entre o gráfico de f e o intervalo [a,b] no eixo x. (Fig.2)



Uma abordagem do problema da área é a utilização do método da exaustão de Arquimedes dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais e em cada um deles construindo um retângulo que se estende desde o eixo x até algum ponto na curva y=f(x).

$$A = \lim_{n \to +\infty} A_n$$

A denota a área exata sob a curva e

A_n denota a aproximação de A usando n retâgulos

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Para atingir os objetivos pretendidos nos apoiamos nos exemplos introdutórios Ex1 da Figura 5 e 6 e Ex2 das Figuras 7 e 8. Através de questionamentos e sugestões presentes nos exemplos conduzimos os alunos a buscar conhecimentos e recursos anteriormente estudados, que às vezes ficam esquecidos.

Figura 5 - Slide 3

O MÉTODO DOS RETÂNGULOS

Para ilustrar essa ideia, vamos calcular a área sob a curva $y=x^2$, acima do intervalo $[0,1]$. Comecemos subdividindo o intervalo em n subintervalos iguais, cada um, portanto, com base 1/n; as alturas serão as imagens da função em

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$$

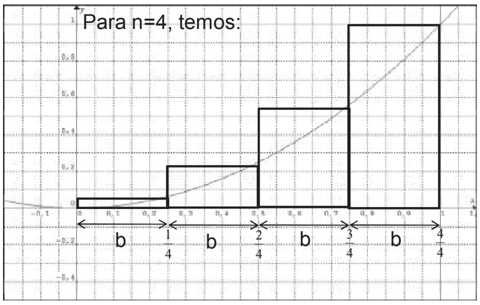
Ex.1 - Vamos calcular por, excesso, a área sob a curva $y=x^2$, acima do intervalo $[0,1]$, subdividindo em 4 retângulos.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6 - Slide 4

Para n=4 teremos a base b=1/4 e alturas serão :



$$h_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$
$$h_2 = f\left(\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$h_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$
$$h_4 = f\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}\right)^2 = 1$$

Somando as áreas dos retângulos temos $A = b.h_1 + b.h_2 + b.h_3 + b.h_4$.

Escrevendo de forma mais simples temos $A = b.(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$.

Fazendo as substituições e os cálculos temos $A = \frac{15}{32} = 0{,}46875$.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7 - Slide 5

CALCULANDO ÁREAS A PARTIR DE DERIVADAS

EX.2 - Determinar a área sob o gráfico de função f(x)=-2x+5 acima do intervalo $[0, a]$, com **a** menor ou igual a 5/2.

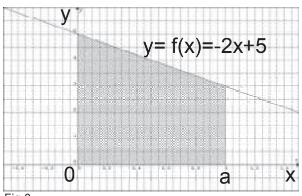


Fig.3

Através de conhecimentos de geometria plana sabemos que:

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{[(5)+(-2a+5)].a}{2}$$

$$A(a) = \frac{(-2a+10).a}{2}$$

$$A(a) = -a^2 + 5a$$

Como **a** é um parâmetro real variável podemos fazer **a=x.**

$$\boxed{A(x) = -x^2 + 5x}$$

Derivando A(x) o que obtemos?

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 8 - Slide 6

Vamos calcular a área da região sob a curva da função f(x)=-2x+5 no intervalo $[0,1]$.

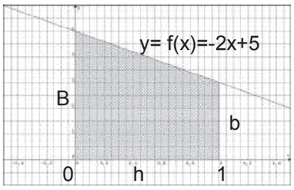


Fig.3

$$b = f(1) - 0 = 3$$
$$B = f(0) - 0 = 5$$
$$h = 1 - 0 = 1$$

Fazendo as substituições:

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(5+3).1}{2} = 4$$

Retomando a expressão que encontramos anteriormente que nos fornece a área em função de x, veja: $A(x) = -x^2 + 5x$

Faça x=1 na função $A(x) = -x^2 + 5x$ e compare com o valor da área A encontrada anteriormente.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a Lição 1 sistematizando as primeiras ideias e apresentando algumas contribuições das integrais, conforme as Figuras 9 e 10.

Figura 9 - Slide 7

SISTEMATIZANDO IDEIAS IMPORTANTES

Se *f* é uma função contínua não-negativa no intervalo [a,b] e A(x) denota a área sob o gráfico de *f* acima do intervalo [a,x] em que x é um ponto qualquer do intervalo [a,b] (Figura 4), então

$$A'(x) = f(x)$$

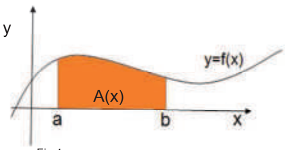


Fig.4

Assim , a partir da derivada A'(x)=f(x) dada, se recuperarmos a fórmula de A(x), poderemos obter a área sob o gráfico *f* acima do intervalo [a,b] calculando A(b).

O processo de encontrar uma função a partir de sua derivada é denominado **antiderivação**, e o procedimento para encontrar áreas através da antiderivação é denominado **método da antiderivação**.

* Anton, Bivens e Davis, 2007 p.352

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 10 - Slide 8

NECESSIDADE E IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO INTEGRAL

Determinação de:

- áreas
- volumes
- comprimento de curvas
- trabalho realizado por uma força variável
- centros de massa
- aplicações na engenharia
- ...

Fonte: Elaborada pelo autor

4.2 Lição 2: Fixando e complementando conhecimentos sobre antiderivação

A Lição 2 utiliza o exemplo ampliador EC1 da Figura 11, que promove situações de aprendizagem para reforçar e ampliar informações apresentadas na Lição 1. O Exemplo EC2 da Figura 12 objetiva ampliar as conclusões acerca da antiderivação como operação inversa da derivação, relacionando a antiderivação ao cálculo da área sob uma curva.

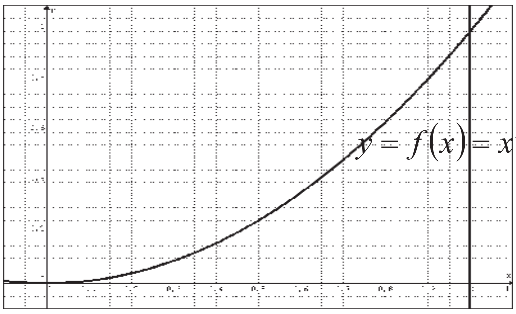
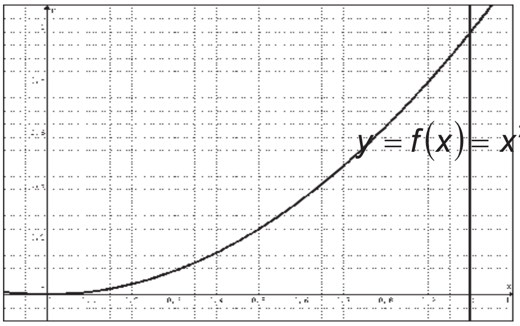
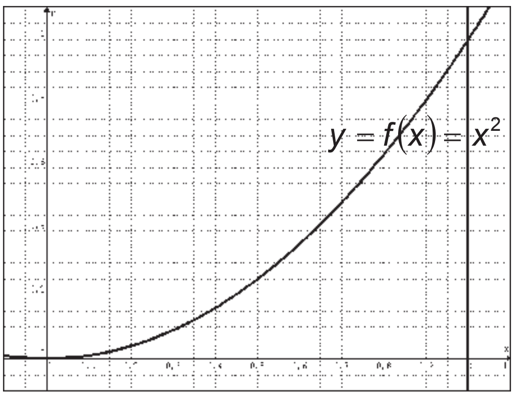
Figura 11 - Exercício complementar 1

EC1 – Se $f(x) = x^2$, no intervalo $[0,1]$, podemos calcular a área aproximada da região abaixo da curva $f(x) = x^2$ e acima de [0,1], através do método da subdivisão em retângulos. Assim, em cada caso:

I) Divida o intervalo [a,b] em n sub-intervalos e construa n retângulos tendo como altura algum valor de $f(x) = x^2$ em cada subintervalo;

II) Use o método da subdivisão em retângulos e calcule a área aproximada da região determinada.

III) Registre suas conclusões.

a)		N = 5
b)		n = 10
c)		n = 20

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 12 - Exercício Complementar 2

EC2 – Sabemos que é possível estabelecer uma relação entre áreas e antiderivadas. Use o **método de antiderivação** para calcular a área da região sob a curva dada por $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$.

Sugestão: Encontre uma função cuja derivada seja $f(x) = x^2$.

Fonte: Elaborada pelo autor

4.3 Lição 3: A integral indefinida e as primeiras ideias importantes

Optamos por dividir a Lição 3 em duas etapas: a primeira etapa L3-A, apresentamos a definição de antiderivada ainda relacionada a derivação. Na segunda parte da lição, denotada por L3-B, apresentamos a notação de integral indefinida e as primeiras propriedades importantes através de exemplos introdutórios.

Através do exemplo introdutório E1 da Figura 13, os alunos são convidados a relacionar uma antiderivada à sua derivada sem muita dificuldade.

Figura 13 - Slide 1

L3-A

Antiderivada

Definição*:
Dizemos que uma função F é uma **antiderivada** de uma função f em um dado intervalo se F'(x) = f(x) para cada x do intervalo.

E1- Definição

$F(x) = x^2 + 3x$ é uma antiderivada de $f(x) = 2x + 3$

Se derivarmos F encontraremos f. Logo, conhecendo uma função f podemos encontrar uma **primitiva** ou **antiderivada** F.

* Anton, 2007, p.355

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, na Figura 14 apresentamos o E2. No E2 selecionamos exemplos que assumem o papel de introduzir e ampliar procedimentos e conceitos. Serão conduzidos com a participação dos alunos fixando e ampliando as ideias iniciais. Ainda na primeira etapa da Lição 3 da Figura 15, apresentamos um exemplo sistematizador E3, a fim de estimular os alunos a descobertas importantes que serão formalizadas e frequentemente usadas.

Figura 14 - Slide 2

E2 – Relacione a 1ª e 2ª colunas, associando cada função da 1ª coluna a sua primitiva na 2ª coluna.

(1) $f(x) = 2x + 3$	$(a)\ F(x) = e^{x} + 2x^{2} + 3$
(2) $f(x) = e^{x} + 4x$	$(b)\ F(x) = -\cos(x)$
(3) $f(x) = sen(x)$	$(c)\ F(x) = x^{2} + 3x - 2$
(4) $f(x) = x$	$(d)\ F(x) = \dfrac{x^{2}}{2} + 4$
(5) $f(x) = \cos(x)$	$(e)\ F(x) = \dfrac{x^{3}}{3} + 3x^{2} - 8x + 4$
(6) $f(x) = x^{2} + 6x-8$	$(f)\ F(x) = sen(x)$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 15 - Slide 3

E3 – Descobertas importantes

Seja um polinômio :
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ para n inteiro não-negativo; $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1 \; e \; a_0$ são coeficientes reais.

Considere um dos termos deste polinômio, por exemplo, $a_n x^n$. Você seria capaz de encontrar uma expressão que represente sua antiderivada?

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a primeira parte da Lição 3, fixando ideias através da discussão, juntamente com os alunos, do exemplo introdutório E4 da Figura 16.

Figura 16 - Slide 4

E4 – Complete as colunas:

Função F(x)	Derivada f'(x)
x^2	
$3x^2 + 2x + 7$	
$5x^3 - x - 12$	

Função F(x)	Derivada f'(x)
	2x-3
	$2x^3 - 5x - 4$
	$x^2 - 3$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 17 - Slide 5

L3 - B

A INTEGRAL INDEFINIDA

TEOREMA 1* - Se F(x) for qualquer antiderivada de f(x) em um intervalo I, então para qualquer constante C a função F(x) + C é também uma antiderivada de f(x) naquele intervalo. Além disso, cada antiderivada de f(x) no intervalo I pode ser expressa na forma de F(x) + C, escolhendo-se apropriadamente a constante C.

Acompanhe o exemplo:

E1: Fórmula da derivada — Fórmula de integração equivalente

$$\frac{d}{dx}\left[x^3\right] = 3x^2 \qquad \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Obs.: O sinal de s espichado $\int$ foi inventada por Leibniz.
* Anton, 2003, p.356

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 18 - Slide 6

Integral Indefinida

NOTAÇÃO:

Sinal de integral

Primitiva

$$\int \underline{f(x)}\,dx = \underline{\overline{F(x)} + C}$$

Integrando

Integral Indefinida

A Integral indefinida é o conjunto de todas as primitivas.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 19 - Slide 7

DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

A **derivação** e a **integração** são operações inversas, assim:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x) \quad \text{e} \quad \int f'(x)dx = f(x) + C$$

Para encontrarmos a integral de uma função f devemos encontrar uma função F tal que, sua derivada resulte na função f que conhecemos.

Assim, $\int f(x)dx = F(x) + C$ e $\frac{d}{dx}[F(x)+C] = F'(x) = f(x)$.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 20 - Slide 8

E2: Seja a função $F(x) = x^4 + 5$.
Sua derivada é:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] = 4.x^{4-1} + 0 = 4x^3 \Rightarrow F'(x) = f(x) = 4x^3$$

Uma vez que a integração é uma operação inversa da derivação, então, a integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int 4x^3 dx = 4\frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$

$$\int 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} + C = x^4 + C$$

No exemplo, conhecíamos a constante C=5, porém, ao calcularmos uma integral indefinida encontramos uma família de funções cuja derivada conhecemos. A função $F(x) = x^4 + 5$ é uma das funções que pertence à família.
Assim:

$$\int 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} + C = x^4 + C$$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 21 - Slide 9

E3 –Fixação:
Calcule a integral $\int \left(3x^2 + 5x - 3\right) dx$

Queremos encontrar uma função cuja derivada seja

$f(x) = 3x^2 + 5x - 3,$

Sabemos que $\int a_n x^n dx = a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para n inteiro diferente de -1.

$$\int \left(3x^2 + 5x - 3\right) dx = \int 3x^2 dx + \int 5x dx + \int (-3) dx$$

*Obs: Essa fórmula permanece válida para n real diferente de -1. (Thomas, 2002, p.329)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 23 - Slide 10

Retomando a integral pedida temos:

$$\int \left(3x^2 + 5x - 3\right) dx = \int 3x^2 dx + \int 5x dx + \int (-3) dx$$

$$\int 3x^2 dx = 3\frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{3x^3}{3} + C_1 = x^3 + +C_1$$

$$\int 5x dx = 5\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = \frac{5x^2}{2} + +C_2$$

$$\int (-3) dx = -3\frac{x^{0+1}}{0+1} + C_3 = -3x + C_3$$

Uma vez que C_1, C_2 e C_3 são constantes, podemos fazer $C_1 + C_2 + C_3 = C$, também uma constante arbitrária.

$$\int \left(3x^2 + 5x - 3\right) dx = x^3 + C_1 + \frac{5x^2}{2} + C_2 - 3x + C_3 = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 3x + C$$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 23 - Slide 11

PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

E4: Calcule a integral $\int [2x+\cos x]dx$

$$\int [2x+\cos x]dx = \int 2xdx + \int \cos xdx$$

$$= \frac{2x^2}{2} + senx + c$$

$$= x^2 + senx + c$$

A integral de uma soma ou diferença de funções é igual à soma ou diferença das integrais dessas funções.

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 24 - Slide 12

PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL

E5 - Calculemos a integra l $\int \left(4x^2+4x+4\right)dx$

$$\int (4x^2+4x+4)dx = \int 4x^2dx + \int 4xdx + \int 4dx = 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 4x + C$$

$$= \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 4x + C$$

- Agora calculemos a integral

$$\int (4x^2+4x+4)dx = \int 4.(x^2+x+1)dx = 4.\int (x^2+x+1)dx =$$

$$= 4.\left[\int x^2dx + \int xdx + \int 1dx\right] = 4.\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1x + C\right] = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 4x + 4C$$

A integral do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela integral da função.

$$\boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}$$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 25 - Slide 13

E6 - Relacione a primeira coluna com a segunda encontrando integrais equivalentes:

$a)\int 3sen(2x)dx$	( ) $2\int x^4 dx$
$b)\int 2sen(x)dx$	( ) $\frac{1}{3}\int sen(2x)dx$
$c)\int \frac{sen(2x)}{3}dx$	( ) $2\int sen(x)dx$
$d)\int \frac{3sen(2x)dx}{2}$	( ) $3\int sen(x)dx$
$e)\int 2\pi xe^{3x}dx$	( ) $3\int sen(2x)dx$
$f)\int 2x^4 dx$	( ) $2\pi\int xe^{3x}dx$
$g)\int 3sen(x)dx$	( ) $\frac{3}{2}\int sen(2x)dx$

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a lição sistematizando os principais resultados através da Figura 26.

Figura 26 - Slide 14

RESULTADOS IMPORTANTES

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para n diferente de -1.

Em palavras : para integrar uma potência em x, de expoente diferente de -1, some 1 ao expoente e divida a nova potência pelo novo expoente.

2) $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ A integral de uma soma ou diferença de funções é igual à soma ou diferença das integrais dessas funções.

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ para qualquer constante k real.

As propriedades 2 e 3 podem ser reunidas em uma só. Como ficaria?

As lâminas foram elaboradas a partir de textos de Anton, Bivens e Davis (2007)

Fonte: Elaborada pelo autor

4.4 Lição 4: fixando e complementando conhecimentos sobre integral indefinida e as primeiras conclusões importantes

A Figura 27 apresenta o EC3, Exemplo Sistematizador. Ao construir uma tabela de integrais de posse de uma tabela de derivação, o aluno consulta as regras de derivação e a partir destas regras, sabendo que a integração é a operação inversa, apresentará a expressão correspondente a cada integral indefinida solicitada. Julgamos este exemplo como sistematizador, uma vez que resgatam e sistematizam importantes conclusões acerca das definições e procedimentos anteriores já estudados.

No EC4, da Figura 28, queremos que o aluno registre os procedimentos já adotados pelo professor ao resolver uma integral indefinida. Concordamos com Pinto, (2008) e Porter e Masingila (2000), que atividades que levam o aluno a registrar seus procedimentos podem contribuir com a aprendizagem.

Através dos exemplos retificadores EC5 da Figura 29 e EC6 da Figura 30, queremos provocar discussões sobre procedimentos errados frequentemente cometidos pelos alunos. O EC7 da Figura 31 apresenta diversos exemplos a fim de fixar e ampliar procedimentos estudados.

Seguimos a lição apresentando o exemplo desafiador EC8 da Figura 32, pretendendo que os alunos, pesquisando entre as identidades trigonométricas, identifiquem aquela que é adequada para transformar o integrando num integrando mais simples, possibilitando a aplicação da tabela de integração. Finalizamos a lição com os exemplos que podem ser classificados como ampliadores e desafiadores EC9 da Figura 33 e EC10 da Figura 34.

Figura 27 - Exercício complementar 3

EC3 - Você aprendeu que a derivação e a integração são operações inversas. A partir das regras de derivação que você conhece, monte uma tabela de integrais indefinidas.	
1	$\int dx =$
2	$\int x^n dx =$
3	$\int e^x dx =$
4	$\int \cos x dx =$
5	$\int senxdx =$
6	$\int \sec^2 x dx =$
7	$\int \cos\sec^2 x dx =$
8	$\int \sec x.tgxdx =$
9	$\int \cos\sec x.\cot gxdx =$
10	$\int \frac{1}{x} dx =$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 28 - Exercício complementar 4

EC4 – Você conhece algumas propriedades importantes das integrais indefinidas. Aponte as propriedades que foram aplicadas na integral já resolvida:	
$\int\left(6x^2-\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$	
$I=\int 6x^2dx-\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}dx-\int x^{-3}dx$	
$=6\int x^2dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-3}dx$	
$=6.\frac{x^{2+1}}{3}+C_1-\frac{1}{2}.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}+C_2-\frac{x^{-3+1}}{-2}+C_3$	
$=2x^3-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^{-2}}{2}+C_1+C_2+C_3$	
$=\ 2x^3-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^{-2}}{2}+C$	

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 29 - Exercício complementar 5

EC5 – Não é correto afirmar que $\int sen(x)dx=\frac{sen(x^2)}{2}+C$. Justifique.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 30 - Exercício complementar 6

EC6 – a) Justifique porque não é correto afirmar que $\int 2x^2.x^6dx=2\frac{x^3}{3}.\frac{x^7}{7}+C$.
b) Qual o valor correto da integral? Justifique.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 31 - Exercício complementar 7

EC7 – Fixe os procedimentos importantes já estudados calculando as seguintes integrais:
i) $\int 7x^6 dx$
j) $\int \frac{6}{x^3} dx$
k) $\int \left(5e^x + 2x - \frac{10}{x^3} \right) dx$
l) $\int \left(3senx + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$
m) $\int \frac{\sqrt[5]{x^4}}{2} dx$
n) $\int \left(6x^2 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$
o) $\int \left(\frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4} \right) dx$
p) $\int \left(\frac{3}{x} + 3x \right) dx$ (cuidado!)
Respostas:
7 a) $x^7 + C$ b) $-\frac{3}{x^2} + C$ c) $5e^x + x^2 + \frac{5}{x^2} + C$ d) $-3\cos x + 4\sqrt{x} + C$ e) $\frac{5}{18} x^{\frac{9}{5}} + C$ f) $2x^3 - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{2x^2} + C$ g) $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + C$ h) $3\ln x + \frac{3}{2}x^2 + C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 32 - Exercício complementar 8

EC8 - Muitas vezes, para calcular uma integral, precisamos transformar o integrando, usando relações conhecidas, como no caso do cálculo de integrais que envolvem funções trigonométricas.

Calcule as integrais seguintes:

a) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$ (Sugestão: cos2x = 2 cos² x – 1)

b) $\int 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ (Sugestão: $sen^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$)

c) $\int \frac{sen^2(x)}{1+\cos(x)}dx$ (Sugestão: $sen^2x+\cos^2 x=1$)

Respostas: 8 a) $\frac{tgx}{2}+C$ b) $x-senx+C$ c) $x-senx+C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 33 - Exercício complementar 9

EC9 - Justifique porque são verdadeiros os resultados das integrais indefinidas:

$a)\int (x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C=\frac{(x+1)^2}{2}+K$ $b)\int (x+1)^2dx=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 34 - Exercício complementar 10

EC10 – a) Os procedimentos usados no exercício anterior não se aplicam à seguinte integral indefinida $\int(2x+1)^2dx$. Justifique.

b) Calcule a integral fazendo o desenvolvimento do produto notável $(2x+1)^2$ e aplicando as propriedades das integrais indefinidas já estudadas.

c) Na letra b) foi possível desenvolver o produto notável e calcular o valor da integral, mas por vezes o desenvolvimento da potência torna-se trabalhoso.

Desafio: Como proceder para calcular $\int(2x+1)^5dx$?

Fonte: Elaborada pelo autor

4.5 Lição 5: Ideias gerais sobre a técnica de integração por substituição simples

Inicialmente, através de um trabalho conjunto com a turma, procuramos retomar ideias importantes da Lição 4, reunidas nos slides das Figuras 35 e 36.

Figura 35 - Slide 1

Retomando ideias importantes

Você viu na lição anterior que a integral $\int (2x-1)^2 dx$ não pode ser resolvida aplicando diretamente a regra $\boxed{\int a_n x^n dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$

É necessário primeiramente desenvolver o produto notável:

$$I) \int (2x-1)^2 dx = \int \left(4x^2 - 4x + 1\right) dx = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$$

Ou então proceder da seguinte maneira:

$$II) \int (2x-1)^2 dx = \int (u)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}.\frac{u^3}{3} + C = \frac{u^3}{6} + C = \frac{(2x-1)^3}{6} + C$$

Observe que fizemos $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Vejamos que os resultados obtidos em I e II são equivalentes:

Desenvolvendo $\frac{(2x-1)^3}{6} + C = \frac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{6} + C = \frac{8x^3}{6} - \frac{12x^2}{6} + \frac{6x}{6} - \frac{1}{6} + C$

e simplificando temos $\frac{(2x-1)^3}{6} + C = \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x + K$ onde $K = -\frac{1}{6} + C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 36 - Slide 2

Sistematizando a técnica da substituição

Suponhamos que F seja uma antiderivada de f e que g seja uma função diferenciável. A derivada de F(g(x)) pode, pela regra da cadeia, ser expressa como $\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x)).g'(x)$

e, em forma de integral indefinida, pode ser escrita como

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Será útil tomar $u = g(x)$ e escrever $du/dx = g'(x)$ na forma $du = g'(x)dx$. Assim podemos escrever $\int f(u)du = F(u) + C$

Fonte: Elaborada pelo autor

Objetivando apresentar as primeiras ideias sobre a técnica da substituição simples elaboramos os exemplos introdutórios E1 da Figura 37 e E2 da Figura 38.

Figura 37 - Slide 3

E1) Calcule $\int\left(x^2-1\right)^{30}.\,2xdx$

Note que $\int\left(x^2-1\right)^{30}.2xdx=\int\left(f\left(x\right)\right)^{30}.g\left(x\right)dx$

Ao derivarmos f, encontramos g imediatamente, assim,
a substituição torna a integral em termos de u mais simples.

$$u = x^2-1\rightarrow\frac{du}{dx}=2x\rightarrow du=2xdx$$

$$\int\left(x^2-1\right)^{30}.2xdx=\int\left(u\right)^{30}du=\frac{u^{31}}{31}=\frac{\left(x^2-1\right)^{31}}{31}+C$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 38 - Slide 4

E2) Calcule $\int 6x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$:

Por substituição temos:

$$u=x^3-5\rightarrow\frac{du}{dx}=3x^2\rightarrow du=3x^2dx\rightarrow\frac{du}{3}=x^2dx,$$

vemos que a integral $\int 6x^2\sqrt{x^3-5}dx=6\int\sqrt{x^3-5}.x^2dx$, assim:

$$6\int\sqrt{x^3-5}.x^2dx=6\int\sqrt{u}\frac{du}{3}=6.\frac{1}{3}\int\sqrt{u}du=2\int u^{\frac{1}{2}}du=2.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{4u^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{4\left(x^3-5\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

Fonte: Elaborada pelo autor

As Figuras 39 e 40 buscaram sistematizar as conclusões que procuramos que os alunos pudessem obter sobre o método de substituição simples.

Figura 39 - Slide 5

A TÉCNICA DA SUBSTITUIÇÃO SIMPLES

Em geral, não há um método seguro e rápido para escolher u, e, em alguns casos, nenhuma escolha de u funcionará. Em tais casos, outros métodos serão necessários, alguns dos quais serão discutidos mais adiante. Fazer a escolha apropriada de u virá com a experiência, mas, o domínio das regras básicas de integrais e seguir o roteiro conforme sugerem Anton, Bivens e Davis (2007).

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 40 - Slide 6

ROTEIRO PARA USO DA TÉCNICA DE SUBSTITUIÇÃO SIMPLES

PASSO 1 Procure uma composição f(g(x)) dentro do integrando para a qual a substituição $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ produza uma integral expressa inteiramente em termos de u e du. Isso pode ou não ser possível.

PASSO 2 Se o Passo 1 tiver sido completado com sucesso, tente calcular a integral resultante em termos de u. Novamente, isso pode ou não ser possível.

PASSO 3 Se o Passo 2 tiver sido completado com sucesso, substitua u por g(x) para expressar a resposta final em termos de x.

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, pretendendo ampliar os conhecimentos e apresentar novos procedimentos, utilizamos o E3 da Figura 41.

Figura 41 - Slide 7

E3) a) Seja a integral indefinida $\int 2.\text{sen}(2x+9)\,dx$:

Vemos que no integrando temos $2.\text{sen}(2x+9)$

Se $u = 2x+9 \rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2 \rightarrow du = 2dx$ e assim podemos fazer a substituição de $2x+9$ por u e 2dx por du. Assim:

$$\int 2.\text{sen}(2x+9)dx = \int \text{sen}(u)du = -\cos(u) = -\cos(2x+9) + C$$

b) Se tivéssemos a integral $\int \text{sen}(2x+9)dx$ o que mudaria?

c) E se tivéssemos a integral $\int \text{sen}(3x\text{-}9)dx$?

d) A integral $\int \text{sen}(2x^2+9)dx$ poderia ser resolvida usando a mesma técnica de substituição simples?

Fonte: Elaborada pelo autor

4.6 Lição 6: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre a técnica de integração por substituição simples

Para fixar e ampliar conhecimentos sobre a técnica da substituição simples, apresentamos os exemplos introdutórios no EC11 da Figura 42, visam apresentar o algoritmo usado na aplicação da técnica possibilitando ao aluno perceber os motivos que nos levam a escolher parte do integrando como u. Refletindo sobre os procedimentos, podemos conduzir o aluno a uma real compreensão e não uma memorização mecânica de procedimentos que podem não contribuir para uma real aprendizagem. Para atingir os objetivos pretendidos, apresentamos os exemplos ampliadores EC12 da Figura 43 e finalizamos a lição através dos exemplos ampliadores e desafiadores do EC13 da Figura 44, EC14 da Figura 45 e EC15 da Figura 46, objetivando evitar a mecanização não refletida de procedimentos e apresentando situações que os levam a buscar outros recursos para a resolução e apontando as limitações da técnica estudada.

Figura 42 - Exercício complementar 11

EC11 - Algumas integrais não são imediatas, ou seja, não há uma fórmula de integração que aponte sua resposta. Em alguns casos a aplicação da técnica da substituição torna mais simples sua resolução. Veja o exemplo apresentado e complete o quadro.

Integral	Integrando	f(x)	g(x)	f´(x)	g´(x)	U
a) $\int 3x^2\left(x^3-2\right)^6 dx$	$3x^2\left(x^3-2\right)^6$	$3x^2$	$\left(x^3-2\right)$	6x	$3x^2$	$\left(x^3-2\right)$
b) $\int \frac{x}{\left(3x^2-1\right)} dx$						
c) $\int \left(2x^2-2\right)^6 x dx$						
d) $\int \frac{2x}{\left(5-3x^2\right)^5} dx =$						
e) $\int (2x-1)^{10} dx$						

O método da substituição é relativamente direto, desde que o integrando contenha uma composição f(g(x)) facilmente reconhecível e seu resto seja múltiplo constante de g´(x). Já que você apontou parte do integrando como u, agora veja se sua escolha foi adequada fazendo a substituição e resolvendo as integrais.

a) $\int 3x^2\left(x^3-2\right)^6 dx =$

b) $\int \frac{x}{\left(3x^2-1\right)} dx =$

c) $\int \left(2x^2-2\right)^6 x dx =$

d) $\int \frac{2x}{\left(5-3x^2\right)^5} dx =$

e) $\int (2x-1)^{10} dx =$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 43 - Exercício complementar 12

EC12 - Você aprendeu um roteiro para a escolha de u adequadamente para a aplicação da técnica da substituição. Siga esse roteiro e resolva as integrais:
a) $\int \mathrm{sen}(3x).dx =$
b) $\int \cos(3x-2)dx$
$c)\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx =$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 44 - Exercício complementar 13

EC13) a) Calcule a integral $\int senx.\cos xdx$ por dois métodos: primeiro fazendo u=senx e, depois u=cosx,
b) Explique por que as duas respostas aparentemente diferentes de (a) são realmente equivalentes.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 45 - Exercício complementar 14

EC14) Às vezes a substituição não é imediata, ainda assim pode ser possível aplicar o método da substituição. Calcule as integrais aplicando as substituições sugeridas:
a) $\int x^2\sqrt{x-1}dx =$ (use u=x-1 logo x=u+1)
b) $\int \cos^3 xdx =$ (lembre-se que $\cos^3 x = \cos^2 x.\cos x$, $\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$, faça $u = \mathrm{sen}x$)

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 46 - Exercício complementar 15

EC15) a) Apesar de serem quase iguais, as integrais indefinidas $\int xe^{x^2}dx$ e $\int xe^{x}dx$ não podem ser resolvidas usando os mesmos procedimentos. Justifique.
b) Desafio. Resolva as integrais anteriores:

Fonte:Elaborada pelo autor

4.7 Lição 7: Ideias gerais sobre a técnica de integração por partes

Retomamos inicialmente desenvolvendo com a turma uma sistematização de resultados anteriormente estudados sobre a técnica de integração por substituição simples, elaborando o slide da Figura 47 e introduzimos as discussões sobre a integração por partes a partir do slide da Figura 50.

Figura 47 - Slide 1

LIMITAÇÃO DA TÉCNICA DA SUBSTITUIÇÃO

Apesar de serem aparentemente semelhantes as integrais indefinidas $\int xe^{x^2}dx$ e $\int xe^{x}dx$ não podem ser resolvidas utilizando-se os mesmos procedimentos. Justifique.

I) Para calcular a integral $\int xe^{x^2}dx$

fazemos $u = x^2$, temos $du = 2xdx \Rightarrow \frac{du}{2} = xdx$

Assim, $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{u}du = \frac{1}{2}e^{u} + C$

retornando à variável x temos que $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

Os procedimentos não se aplicam ao cálculo da integral $\int xe^{x}dx$. Voltaremos a questão após o conhecimento de uma nova técnica de integração.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 48 - Slide 2

A REGRA DO PRODUTO E A INTEGRAÇÃO POR PARTES

Quando *u* e *v* são funções deriváveis de *x*, a Regra do Produto para derivação nos diz que $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Integrar os dois lados em relação a *x* e rearranjá-los leva à equação da integral

$$\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = \int\left(\frac{d}{dx}(uv)\right)dx - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

$$= uv - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

Apresentando de forma mais simples temos: $\int udv = uv - \int vdu$

Fonte: Elaborada pelo autor

O objetivo foi apresentar a técnica da integração por partes como importante na resolução de integrais onde a técnica da substituição simples não funciona, através de exemplos introdutórios E1 e E2 da Figura 49, a fim de atingirmos rapidamente a compreensão dos procedimentos usados na aplicação da técnica e deixando claro que o domínio da técnica necessita de prática e dos conhecimentos das regras básicas de cálculo diferencial e integral estudados anteriormente.

Figura 49 - Slide 3

E1: Podemos calcular $\int xe^x dx$ aplicando a nova fórmula obtida:

fazendo $u = x \Rightarrow du = dx$

e $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

e usando a fórmula temos $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

E2:Calcule $\int x \cos x dx$

Solução: Usamos a fórmula $\int udv = uv - \int vdu$

com $u = x$, $dv = \cos x dx$

Para completar a fórmula, tomamos a diferencial de *u* e achamos a primitiva mais simples de cos *x*.

$du = dx$, $v = senx$

Então,

$$\int x \cos x dx = xsenx - \int senxdx = xsenx + \cos x + C$$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 50 - Slide 4

ROTEIRO PARA INTEGRAÇÃO POR PARTES

O objetivo principal da integração por partes é escolher u e dv para obter uma nova integral que é mais fácil de calcular do que a original. Não há regras imediatas e precisas para isso.

Uma estratégia que geralmente funciona é escolher u e dv de tal modo que u fique “mais simples” ao derivar, enquanto dv seja fácil integrar e obter v.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ampliamos os conhecimentos através dos exemplos E3 e E4 da Figura 51. Esclarecemos, porém, que assim como a técnica da substituição simples, esta técnica apresenta suas limitações.

Figura 51 - Slide 5

E3: Resolva os exemplos seguintes como fixação:

a) $\int x\,\mathrm{sen}(2x)\,dx$ b) $\int x^3 \ln(x)\,dx$

E4: Algumas vezes é preciso usar a técnica de integração por partes mais de uma vez. Resolva as integrais seguintes:

a) $\int x^2 e^x\,dx$ b) $\int 2x^3\,\mathrm{sen}(x)\,dx$

Fonte: Elaborado pelo autor

4.8 Lição 8: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre a técnica de integração por partes

Objetivando ampliar os conhecimentos acerca dos procedimentos adotados na aplicação da técnica da integração por partes, apresentamos alguns exemplos a serem resolvidos pelos alunos, alertando sobre quais funções compõem o integrando, estimulando-os a refletir sobre essas diferentes funções e sobre qual seria a escolha apropriada para u e dv em cada caso. Preparamos os exemplos introdutórios e ampliadores EC16 da Figura 52, EC17 da Figura 53, EC18 da Figura 54 e apresentamos um exemplo sistematizador EC19 da Figura 55, que visa formalizar as reflexões dos exemplos anteriores.

Figura 52 - Exercício complementar 16

EC16) A integral do tipo $\int \ln x dx$ não é imediata, necessita a aplicação da técnica de integração por partes para a sua resolução. Da mesma forma, quando temos integrais que envolvem o produto de função **algébrica** por **logarítmica**, aplicamos a técnica de integração por partes. Use esta técnica e resolva as integrais abaixo. **Dica: A escolha de dv=lnxdx não é adequada**

b) $\int \ln x dx =$ b) $\int x \ln x dx$ c) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 53 - Exercício complementar 17

EC17) Observe as integrais seguintes envolvendo o produto de função **trigonométrica** por função **algébrica**.
Você já sabe que derivadas de funções algébricas são, na maioria das vezes, mais simples que derivadas de funções trigonométricas. Procure fazer a escolha adequada para u e dv e resolva as integrais.
Dica: Algumas vezes precisamos **repetir a técnica de integração por partes** para resolver uma integral.

a) $\int x^2 \cos(x) dx$ b) $\int 4x^2 sen(x) dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 54 - Exercício complementar 18

EC18) Nas integrais que envolvem o produto de função **exponencial** por função **algébrica**, a escolha de dv mais adequada será a exponencial, pois, pela fórmula de integração de exponencial $\int e^u du = e^u + C$ e escolhendo u como a função algébrica, sua diferencial será mais simples. Faças as escolhas adequadas de u e dv e calcule as integrais seguintes. a) $\int xe^x dx$ b) $\int 2x^3 e^x dx$ (Sugestão: ver dica do EX17)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 55 - Exercício complementar 19

EC19 - Baseando-se nas integrais já resolvidas aplicando a técnica de integração por partes, observe a tabela e faça a sugestão da escolha de u e dv, para aplicação da técnica de integração por partes.

Integral	u	Dv
I) $\int (\text{algébrica})(\text{logarítmica})dx$		
II) $\int (\text{algébrica})(\text{exponencial})dx$		
III) $\int (\text{algébrica})(\text{logarítmica})dx$		

Obs: Uma estratégia útil para escolher u e dv quando o integrando envolve o produto de duas funções de dois tipos diferentes da lista seguinte, é escolher **u** como a função que ocorre antes na lista e **dv** como o restante do integrando: **L**ogarítmica, trigonométrica **I**nversa, **A**lgébrica, **T**rigonométrica, **E**xponencial. O acrônimo **LIATE** ajuda a lembrar a ordem.

De acordo com o método apresentado anteriormente, procure resolver as integrais:

a) $\int x^2 \ln(3x)dx$ b) $\int x\sec^2(x)dx$ c) $\int e^x \cos(x)dx$ (veja a dica do EC17)

d) $\int e^x \cos(x)dx$ (inverta a escolha feita obedecendo o método do LIATE, e veja se é possível resolver a mesma integral)

Fonte: Elaborada pelo autor

Finalizamos a lição ampliando e desafiando através do EC20 da Figura 56.

Figura 56 - Exercício complementar 20

EC20 - Podemos encontrar integrais que necessitam a aplicação de mais de uma técnica na sua resolução. Aplicando a técnica de integração por partes e a técnica da substituição simples, resolva as integrais.

a) $\int xe^{-2x}dx$ b) $\int x\cos(2x)dx$ c) $\int x^2 sen(3x)dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

4.9 Lição 9: ideias gerais sobre integral definida, teorema fundamental do cálculo e aplicação das integrais ao cálculo de áreas

Considerando os alunos com os quais foi desenvolvida a pesquisa, julgamos que seria razoável uma abordagem menos rigorosa do ponto de vista de um trabalho com teoremas e demonstrações dos resultados relacionados a Integral definida e ao Teorema Fundamental do Cálculo. Os slides das Figuras 57 a 59 retomam conceitos já abordados.

Figura 57 - Slide 1

RETOMANDO IDEIAS

Suponha que a função f seja contínua e não-negativa no intervalo [a,b] e que R denote a região delimitada inferiormente pelo eixo x, lateralmente pelas retas verticais x=a e x=b e superiormente pela curva y =f(x)

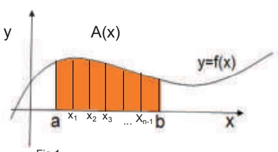


Fig.1

Dividimos o intervalo [a,b] em n subintervalos iguais inserindo n-1 pontos igualmente espaçados entre a e b e denotamos esses pontos por $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Cada um desses subintervalos tem comprimento $\Delta x = (b-a)/n$. Os retângulos com bases Δx e alturas $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 58 - Slide 2

O CÁLCULO DE ÁREA

As áreas dos retângulos seriam denotadas por:

$A_1 = f(x_1).\Delta x;\ A_2 = f(x_2).\Delta x; \ldots ; A_n = f(x_n).\Delta x$

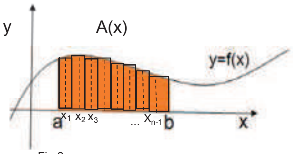


Fig.2

Dividimos o intervalo [a,b] em n subintervalos iguais inserindo n-1 pontos igualmente espaçados entre a e b e denotamos esses pontos por $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Cada um desses subintervalos tem comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Os retângulos com bases Δx e alturas $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$.

A união dos retângulos forma uma região cuja área pode ser uma aproximação da área da região abaixo da curva dada pela função f e acima do eixo x entre x=a e x=b. Em símbolos temos: $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k).\Delta x$

Quanto maior o número de subintervalos n, melhor será a aproximação, assim, a área exata será $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).\Delta x$, se o limite existir.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 59 - Slide 3

Anteriormente calculamos a área da região sob a curva da função f(x)=-2x+5 no intervalo $[0,1]$, recuperando a função primitiva F e fazendo A=F(1).

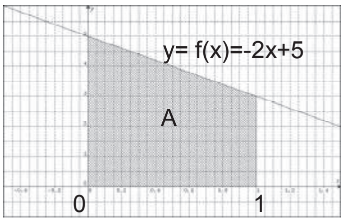


Fig.3

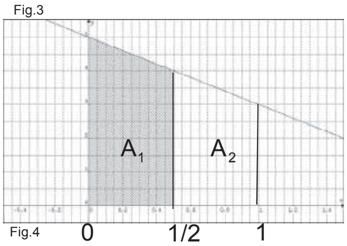


Fig.4

$F(x) = -x^2 + 5x$ e $A = -(1)^2 + 5(1) = 4$ u.a

Para calcularmos a área no intervalo de [0,1/2], faremos F(1/2):

$$A_1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} \text{ u.a}$$

Como poderíamos aproveitar as informações anteriores para calcular a área 2, limitada acima por f, abaixo pelo eixo x, entre x=1/2 e x=1?

Fonte: Elaborada pelo autor

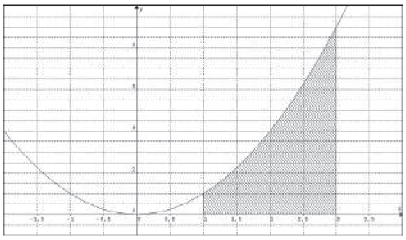
O principal objetivo da Lição 10 foi aplicar as integrais para o cálculo de áreas, visando a um maior interesse e participação dos alunos. Através dos exemplos introdutórios, E1 da Figura 60, E2 da Figura 64 e E3 da Figura 63, apresentamos as principais ideias e procedimentos adotados.

Figura 60 - Slide 4

E1) Calcule a integral definida $\int_1^3 x^2 dx$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ É uma ntegral indefinida de $f(x) = x^2$

$$\int_1^3 x^2 dx = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} + C - C = \frac{26}{3}$$



$$\int_1^3 x^2 dx = = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Esse método contribuiu para os matemáticos Newton e Leibniz, enunciarem um poderoso teorema, importantíssimo no estudo do cálculo, o **teorema fundamental do cálculo**, que possibilita o **cálculo de integrais definidas usando antiderivadas**.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 61 - Slide 5

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Parte 1:
Se f for contínua em [a,b], então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em [a,b] é diferenciável em (a,b) e g'(x)=f(x).

Parte 2:
Se f for contínua em [a,b], então: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que F'=f.

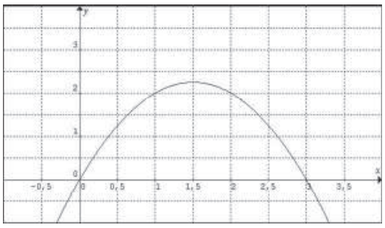
Veja que, como $2x + 1$ é contínua para qualquer x real, a integral definida será : $\int_1^3 (2x+1)dx = x^2 + x\Big|_1^3 = [(3)^2 + 3] - [(1)^2 + 1] = 12 - 2 = 10$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 62 - Slide 6

E2) Calcule a integral definida $\int_0^2 (-x^2+3x)dx$.

Sabemos que a função $f(x) = -x^2 + 3x$ é definida em todo o conjunto dos reais e podemos observar que é contínua. Temos ainda que, por se tratar de um polinômio, a função é diferenciável qualquer que seja o número real e portanto é diferenciável em(0,2).



Pela parte 2 do TFC, como f é contínua, encontremos qualquer antiderivada de f:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C$$

$$F(2) = -\frac{(2)^3}{3} + 3\frac{(2)^2}{2} + C = -\frac{8}{3} + 6 + C = \frac{10}{3} + C$$

$$F(0) = -\frac{(0)^3}{3} + 3\frac{(0)^2}{2} + C = C$$

Assim, $\int_0^2 (-x^2+3x)dx = F(2) - F(0) = \frac{10}{3} + C - C = \frac{10}{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 63 - Slide 7

E3) Calcule a integral definida $\int_0^{\pi} \text{sen}x dx$.

Encontramos a antiderivada de senx, calculamos os valores das antiderivadas nos limites superior e inferior e aplicamos a segunda parte do TFC.

$$\int_0^{\pi} \text{sen}x dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = [-\cos\pi] - [-\cos 0] = [-(-1)] - [-(1)] = 2$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}x dx = 2$$

Fonte: Elaborada pelo autor

4.10 Lição 10: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre a integral definida, o teorema fundamental e cálculo de áreas

Figura 64 - Exercício complementar 21

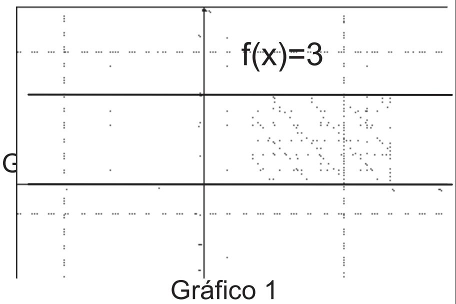
<table>
<tr>
<td>


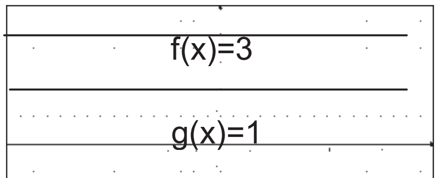
Gráfico 1
</td>
<td>
EC21 - A representação gráfica ao lado refere-se à região plana delimitada por f(x)= 3, x=1 e x=4. Calculando a integral definida da função dada no intervalo [1;4], teremos: $\int_1^4 3dx = 3x\Big|_1^4$ =3.(4)-3.(1)=12-3=9. Observe que a integral definida representa a área do retângulo limitado por x=1, x=4, f(x)=3 e o eixo x.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


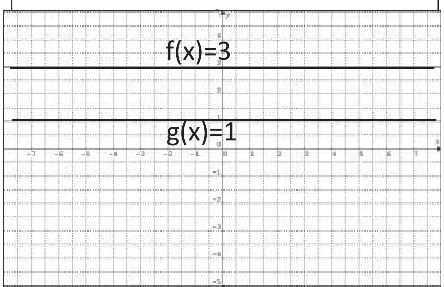
Gráfico 2


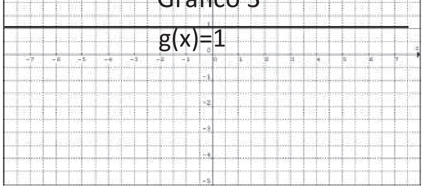
Gráfico 3


Gráfico 4
</td>
<td>
EC22 - Observando o gráfico das curvas f(x)=3 e g(x)=1, faça o que se pede:
g) No gráfico 2, hachure a região cuja área é dada pela integral $\int_2^6 f(x)dx$.
h) No gráfico 3, hachure a região cuja área é dada pela integral $\int_2^6 g(x)dx$.
i) Represente no gráfico 4 a região entre as duas curvas dadas pelas funções **f** e **g** no intervalo $2 \leq x \leq 6$.
j) Usando $\int_2^6 f(x)dx$ e $\int_2^6 g(x)dx$ estabeleça uma expressão matemática que represente a área da região especificada no item c.
k) é possível expressar a área do item c através de **uma única integral definida**? Qual é essa integral?
l) Redija um pequeno parágrafo registrando suas conclusões sobre o cálculo de áreas entre duas curvas num dado intervalo usando integrais definidas.
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborada pelo autor

Apresentamos a proposta de resolução de uma sequência de exemplos EC21 e EC22 da Figura 64, que desempenham o papel de introdutórios, ampliadores e sistematizadores, a fim de possibilitar aos alunos a construção de conceitos e procedimentos que serão aplicados posteriormente em exemplos mais complexos.

Figura 65 - Exercício complementar 23

EC23 - Supondo $\int_{-2}^{1} f(x)dx = M$, $\int_{1}^{3} f(x)dx = N$ e $\int_{3}^{5} f(x)dx = P$, calcule:

a) $\int_{-2}^{1} 2f(x)dx =$ b) $\int_{1}^{3} \frac{f(x)}{4}dx =$ c) $\int_{-2}^{5} f(x)dx =$

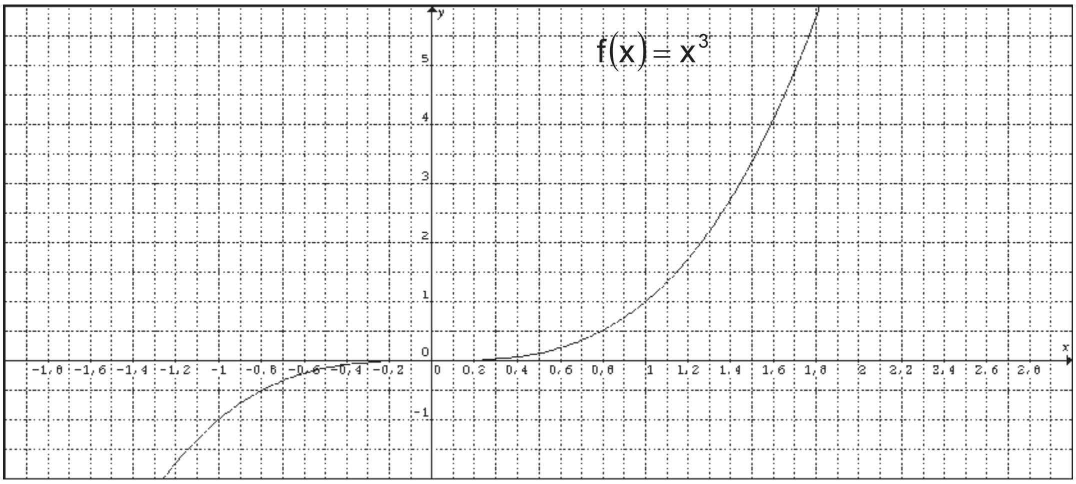
Fonte: Elaborada pelo autor

Através dos exemplos introdutórios e sistematizadores que compõem o EC23 da Figura 65, desejamos fixar e sistematizar propriedades da integral definida.

Com o exemplo ampliador e retificador EC24 da Figura 66 pretendemos que os alunos compreendam que nem toda integral corresponde a uma área. Queremos ainda, que percebam que quando a função possui uma representação gráfica abaixo do eixo x, a integral nesse intervalo resulta num valor negativo, que, em módulo, é igual ao valor da área. Com este exemplo, objetivamos discutir os procedimentos usados para calcular áreas através de integral definida. Apresentamos situações que a integral fornecerá o valor da área e outros que não fornecerá o valor da área, provocando discussões importantes.

Figura 66 - Exercício complementar 24

EC24 - Observe a representação gráfica da função $f(x) = x^3$ e responda:



a) Calcule a integral definida $\int_{-1}^{0} f(x)dx$. O valor da integral pode ser a área limitada entre a curva e o eixo x no intervalo [-1,0]?

b) Calcule a integral definida $\int_{0}^{2} f(x)dx$. O valor da integral pode ser a área limitada entre a curva e o eixo x no intervalo [0,2]?

c) Calcule a integral definida $\int_{-1}^{2} f(x)dx$. O valor da integral pode ser a área limitada entre a curva e o eixo x no intervalo [-1,2]?

Estabeleça uma expressão matemática que represente a área da região entre $f(x) = x^3$, x=-1, x=2 e o eixo x.

Fonte: Elaborada pelo autor

Objetivando retomar procedimentos os exemplos desafiadores EC25 da Figura 67 foram apresentados. Retomam algumas técnicas de integração e fixam os procedimentos vistos em integral definida.

Figura 67 - Exercício complementar 25

EC25 - Use as técnicas de integração já estudadas e calcule as integrais definidas:

a) $\int_{0}^{2} \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$ b) $\int_{0}^{\ln 3} e^x.(1+e^x)^2 dx$ c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} x\cos(2x)dx$ d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Através do exemplo ampliador e sistematizador EC26 da Figura 68, pretendemos provocar discussões acerca da composição do integrando adequado para a obtenção da área destacada.

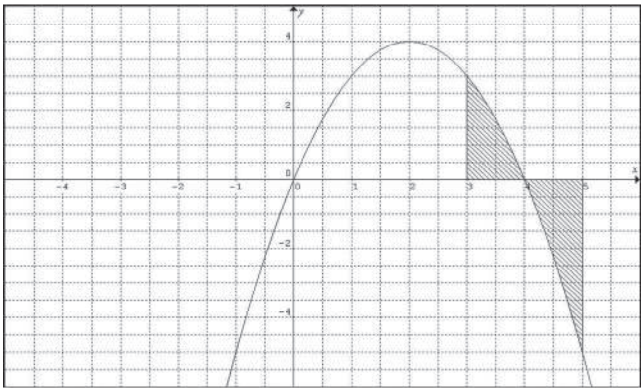
Figura 68 - Exercício complementar 26

EC26 - É possível calcular a área da região limitada por uma curva e o eixo x num intervalo $a \leq x \leq b$, usando integrais.

A representação gráfica abaixo refere-se à função $y = -x^2 + 4x$.

a) Escreva uma expressão envolvendo integrais que forneça a área da região sombreada.

b) Calcule o valor da área em destaque.



Fonte: Elaborada pelo autor

4.11 Lição 11: ideias gerais sobre o cálculo de volumes através das integrais

Através da Lição 11, pretendemos fornecer as noções gerais sobre os procedimentos usados para calcular o volume de sólidos obtidos por rotação ou não, dando uma maior ênfase aos sólidos obtidos por rotação de uma região plana R, em torno dos eixos x e y, ou em torno de um eixo qualquer, paralelo aos eixos coordenados.

Para atingir nossos objetivos, resgatamos as ideias já apresentadas no cálculo de áreas e estendemos as noções ao cálculo de volumes, a partir dos slides da Figura 69 e 70. Um exemplo sistematizador E1 foi apresentado na Figura 71, objetivando possibilitar um entendimento da expressão $\int_a^b A(x)dx$, usada para o cálculo do volume de um sólido que se estende ao longo de um eixo; eixo x, por exemplo, num intervalo de [a,b]. Nesse caso A(x) representa a área das secções perpendiculares obtidas ao longo do intervalo considerado e dx a altura destas secções.

Figura 69 - Slide 1

RELEMBRANDO PROCEDIMENTO IMPORTANTES

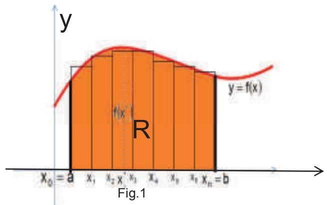


Fig.1

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ Soma de Riemann

$A_R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

Lembramos que o princípio básico para encontrar a área de uma região plana R é dividir a região em retângulos com comprimentos cada vez menores, agrupar os retângulos para formar uma aproximação da região que queremos encontrar. Formar uma **soma de Riemann** com a área desses retângulos e calculamos o limite, obtendo uma integral definida que representa a área região R.

$A_R = \int_a^b f(x)dx$ Integral definida de a para b da função f

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 70 - Slide 2

CÁLCULO DE VOLUMES

Sob condições apropriadas, a mesma estratégia usada para calcular áreas pode ser usada para calcular volumes. A ideia é dividirmos o sólido em fatias finas, aproximar o volume de cada fatia, somar as aproximações para formar uma soma de Riemann e passar ao limite para obter uma integral definida que nos forneça o volume.

Para começarmos, consideremos um cilindro gerado pela translação de uma região A ao longo de uma distância h, então dizemos que h é a altura do cilindro e o volume V deste é definido por

$$v = A.h = [\text{área de uma seção transversa I}]x[\text{altura}]$$

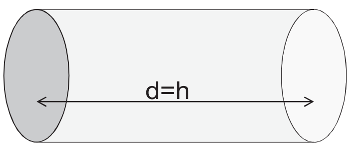
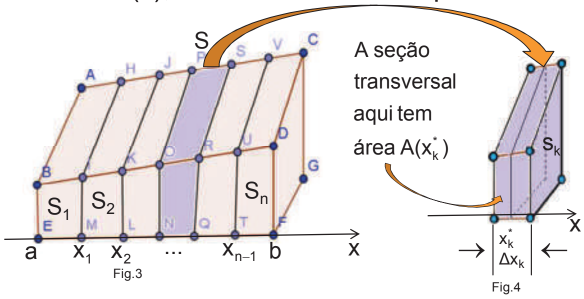


Fig.2

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 71 - Slide 3

E1) Seja S um sólido que se estende ao longo do eixo x e que é delimitado à esquerda e à direita, respectivamente, pelos planos perpendiculares ao eixo x em x=a e x=b. Vamos encontrar o volume V do sólido, supondo que sua seção transversal tenha área A(x), conhecida em cada ponto x do intervalo [a,b].



Somando as aproximações obtemos a soma de Riemann que aproxima o volume V:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x$$

Tomando limite quando n cresce e as extensões tendem a zero, obtemos a integral definida

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b A(x)dx$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 72 formalizamos as ideias gerais para ampliarmos através de exemplos.

Figura 72 - Slide 4

Resultados Importantes

1ª Fórmula para o volume Seja S um sólido delimitado por dois planos **perpendiculares ao eixo x em x=a e x=b**. Se, para cada x em [a,b], a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x for **A(x)**, então o volume do sólido é

$$V = \int_a^b A(x)dx \quad \text{desde que } A(x) \text{ seja integrável.}$$

2ª Fórmula para o volume Seja S um sólido delimitado por dois planos **perpendiculares ao eixo y em y=c e y=d**. Se, para cada y em [c,d], a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo y for **A(y)**, então o volume do sólido é

$$V = \int_c^d A(y)dy \quad \text{desde que } A(y) \text{ seja integrável.}$$

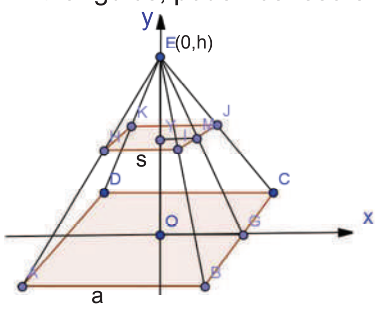
Fonte: Elaborada pelo autor

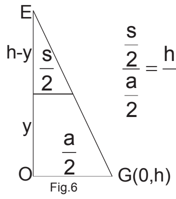
Através da Figura 72, sistematizamos os procedimentos apresentados, refletindo sobre estes procedimentos objetivamos facilitar a aplicação de conceitos e procedimentos ao cálculo de volumes de sólidos obtidos por rotação de uma região plana em torno de um dos eixos cartesianos e posteriormente em torno de eixos paralelos aos eixos cartesianos.

No exemplo E2 das Figuras 73 e 74, objetivamos apresentar o volume de uma pirâmide usando os procedimentos discutidos no E1.

Figura 73 - Slide 5

E2) Vejamos uma pirâmide de base quadrada com aresta da base a, e altura h. Introduzimos um sistema retangular de coordenadas no qual o eixo y passa pelo ápice, o eixo x passa pela base e é paralelo a um de seus lados.
Em qualquer ponto y de [0,h] sobre o eixo y, a seção transversal perpendicular ao eixo y é um quadrado. Se s for o comprimento de um lado desse quadrado, então, por semelhança de triângulos, podemos escrever:





$$\frac{\frac{s}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{h-y}{h} \text{ ou } s = \frac{a}{h}(h-y)$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 74 - Slide 6

Assim, a área A(y) da seção transversal em y é $A(y)=s^2=\frac{a^2}{h^2}(h-y)^2$

E o volume é dado por $V=\int_0^h A(y)dy$, fazendo as devidas trocas e operações temos:

$$V=\int_0^h A(y)dy=\int_0^h \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2dy=\frac{a^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2dy=\frac{a^2}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-y)^3\right]_0^h$$

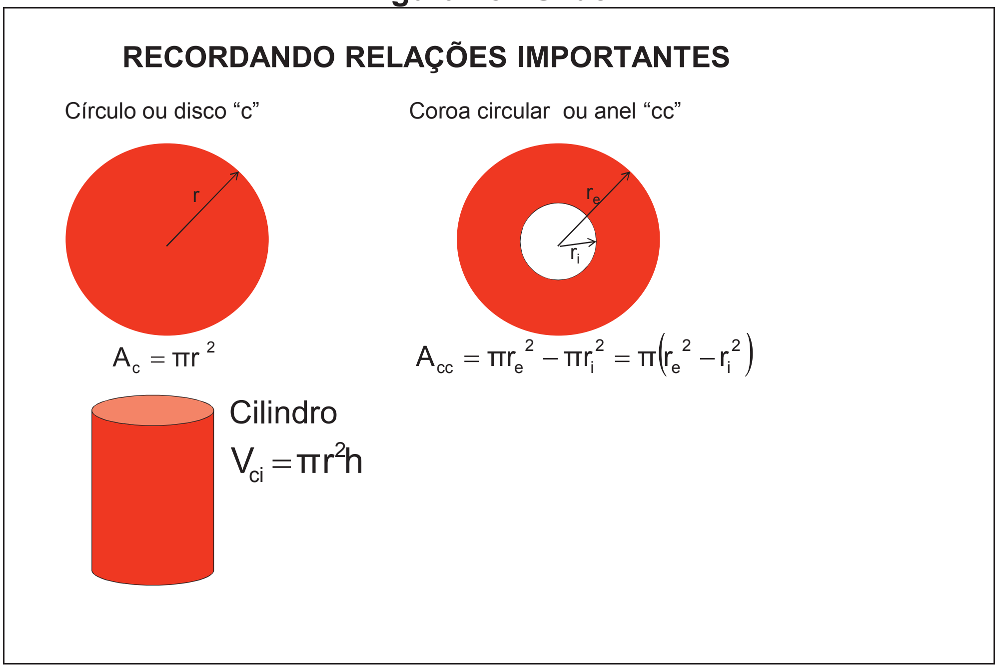
$$V=-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{h^2}\left[(h-y)^3\right]_0^h=-\frac{a^2}{3h^2}\left[(h-h)^3-(h-0)^3\right]=\frac{1}{3}a^2.h$$

Verificamos que o volume é 1/3 da área da base vezes a altura.
Esse resultado já era esperado?

Fonte: Elaborada pelo autor

Recordamos os conceitos básicos relacionados ao cálculo de área do círculo e volume de cilindro para apresentarmos as ideias gerais sobre o cálculo do volume dos sólidos obtidos pela rotação.

Figura 75 - Slide 7



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 76 - Slide 8

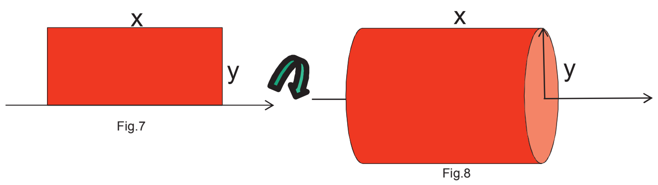
GERANDO UM CILINDRO A PARTIR DA ROTAÇÃO DE UMA REGIÃO PLANA RETÂNGULAR

Um sólido de revolução se forma da seguinte maneira:

Dada uma região R plana e L uma linha reta que pode tocar ou não em R e que esteja no mesmo plano de R.

Girando-se R em torno de L, forma-se uma região chamada de sólido de revolução. Veja:

Girando um retângulo de comprimento x e largura y, em torno de uma reta L obtemos um cilindro de altura x e raio da base y.



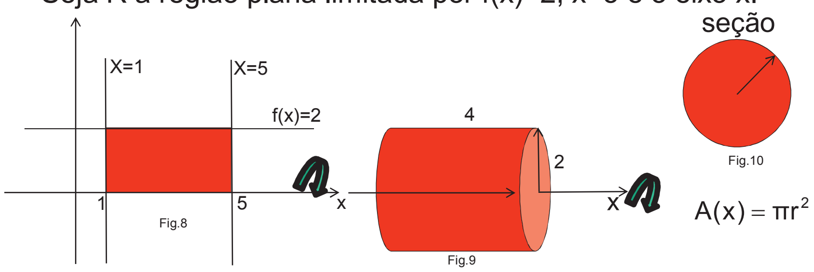
Fonte: Elaborada pelo autor

Apresentamos os exemplos introdutórios E3 através das Figura 77 e 78 e E4 na Figura 79.

Figura 77 - Slide 9

E3) GERANDO UM CILINDRO A PARTIR DA ROTAÇÃO DE UMA REGIÃO PLANA RETANGULAR.

Seja R a região plana limitada por f(x)=2, x=5 e o eixo x.



Note que, ao girarmos em torno do eixo x, a região gera um cilindro, com raio igual ao valor da função f e altura igual a variação de x.

Usando a expressão, já conecida, temos : $V = \int_a^b A(x)dx$ com $A(x) = 4\pi$, a=1 e b=5

Assim, $V = \int_1^5 4\pi dx = 4\pi x\Big|_1^5 = 4\pi.[5-1] = 16\pi u.v.$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 78 - Slide 10

VOLUME OBTIDO PELA ROTAÇÃO DE UMA REGIÃO PLANA EM TORNO DO EIXO X

Seja D a região plana esboçada na figura 11. Quando cada um dos pequenos retângulos são girado em torno do eixo x, geramos pequenos cilindros. A soma dos volumes de cada cilindro gerado aproxima o volume da região D. Formando uma soma de Riemann com todos os volumes e tomando limite para formar uma integral definida, encontraremos o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x.

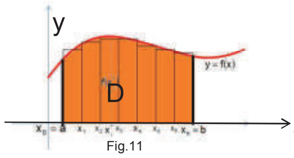


Fig.11

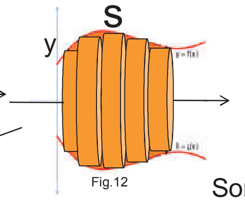


Fig.12

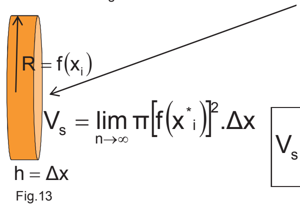


Fig.13

$V_1 = \pi[f(x_1)]^2.\Delta x$

$V_2 = \pi[f(x_2)]^2.\Delta x$

.
.
.

$V_i = \pi[f(x_i)]^2.\Delta x$

Soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} \pi[f(x^*_i)]^2.\Delta x$

$V_s = \lim_{n\to\infty} \pi[f(x^*_i)]^2.\Delta x$

$\boxed{V_s = \pi\int_a^b [f(x^*_i)]^2.\Delta x}$

Assim $\boxed{V_s = \pi\int_a^b [f(x)]^2.dx}$

Fonte: Elaborada pelo autor

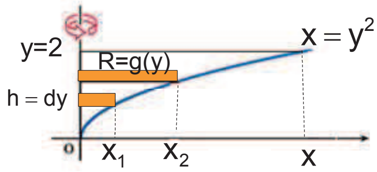
Figura 79 - Slide 11

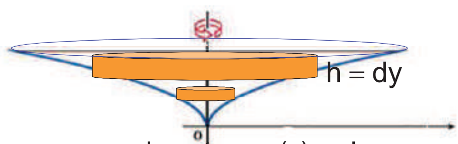
VOLUME OBTIDO PELA ROTAÇÃO DE UMA REGIÃO PLANA EM TORNO DO EIXO Y

E4) Vamos calcular o volume do sólido gerado pela rotação da região plana limitada por $y = \sqrt{x}$, y=2 e x=0 é girada em torno do eixo y.

$\text{Raio} = g(y) \Rightarrow R = y^2$

$\text{altura} = \Delta y \Rightarrow h = dy$





Cada um dos retângulos inscritos, com comprimento r=g(y) e largura h=dy, ao girar em torno do eixo y, gera um cilindro, com raio r e altura h. Sabemos que uma integral definida $V = \int_c^d A(y)dy$ nos fornece o volume do sólido gerado, e que a área A(y) é:

$$A(y) = \pi[(y^2)]^2$$

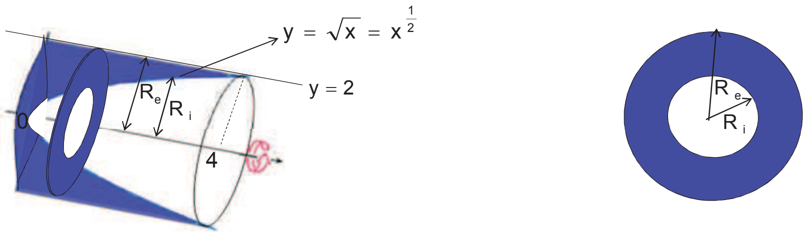
$$V_s = \pi\int_0^2 y^4 dy = \pi\left.\frac{y^5}{5}\right| = \frac{\pi}{5}\left[(2)^5\right] = \frac{32\pi}{5}\text{u.v.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Os exemplos ampliadores E5 da Figura 80, E6 da Figura 81 e E7 da Figura 82 objetivaram apresentar as variações necessárias, fornecendo meios para generalizarmos o método do disco e da coroa-circular.

Figura 80 - Slide 12

E5) Qual é o volume do sólido gerado pela rotação da região anterior em torno do eixo eixo x?



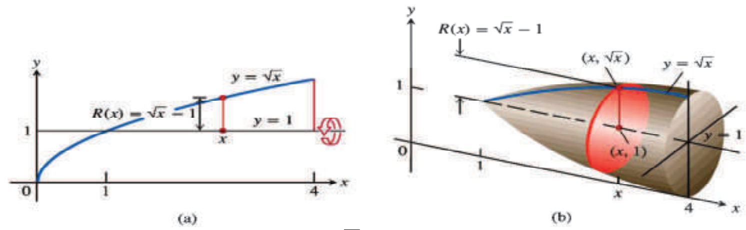
$$V_s = \pi\int_0^4 \left[2^2 - [f(x)]^2\right]dx = \pi\int_0^4 \left[4 - [x^{\frac{1}{2}}]^2\right]dx = \pi\int_0^4 [4 - x]dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 \pi$$

$$V_s = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 \pi = \left[4.4 - \frac{4^2}{2}\right]\pi = [16 - 8]\pi = 8\pi \text{u.v.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 81 - Slide 13

Ex6) Seja D a região limitada por $y = \sqrt{x}$, y=1 e x=4. Escreva a integral que nos forneça o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno de y=1.



Nesse caso, o raio será $R = \sqrt{x} - 1$, assim, pela fórmula de volume temos:

$$V_s = \pi\int_1^4 \left[\sqrt{x} - 1\right]dx = \pi\int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right]dx = \pi\int_1^4 \left[x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1\right]dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x\right]_1^4$$

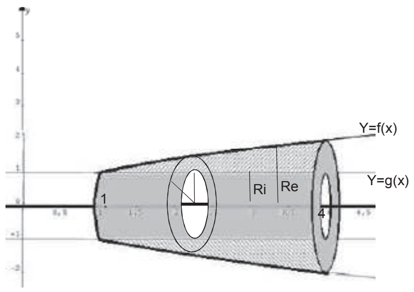
$$V_s = \pi\left[\left(\frac{4^2}{2} - \frac{4(4)^{\frac{3}{2}}}{3} + 4\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{4(1)^{\frac{3}{2}}}{3} + 1\right)\right] = \frac{7\pi}{6} \cong 3{,}66 \text{u.v.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 82 - Slide 14

E7) Seja D a região limitada por $f(x)=\sqrt{x}$, g(x)=1 e x=4. Escreva a integral que nos forneça o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno do eixo x.

Re=f(x) Ri=g(x)



Como o sólido apresenta superfície interna, seu volume será a diferença entre o volumes, e pode ser calculado diretamente com a integral:

$$V_s=\pi\int_1^4\left[[\sqrt{x}]^2-[1]^2\right]dx=$$

$$V_s=\pi\int_1^4[[x-1]]dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4=\frac{9}{2}\pi u.v.$$

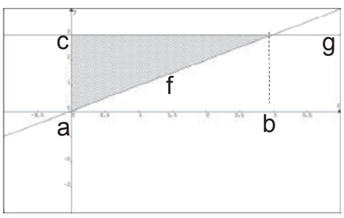
Fonte: Elaborada pelo autor

Apresentamos, então, alguns slides (Figuras 83 e 84), com o objetivo de possibilitar a sistematização e generalização dos procedimentos trabalhados no cálculo de volumes.

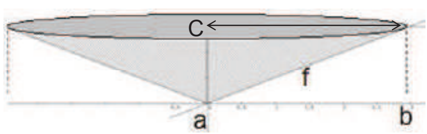
Figura 83 - Slide 15

GENERALIZANDO PROCEDIMENTOS IMPORTANTES

Seja a região plana D, sombreada, limitada pelas funções f, g e pelo eixo y, representada na figura.



Girando a região plana D, em torno do eixo y, obtemos um sólido, cujo volume será dado por:

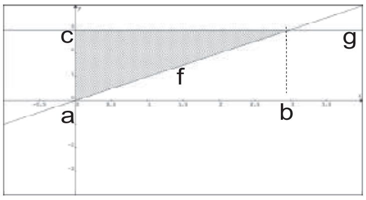


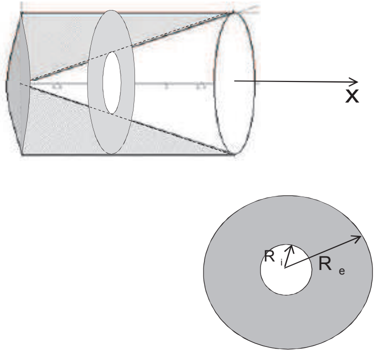
$$V_s=\pi\int_a^c\left[[f(y)]^2\right]dy$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 84 - Slide 16

Girando a região plana D em torno do eixo x, obtemos um sólido que possui superfícies internamente, seu volume será dado por:





$$V_s = \pi \int_a^b \left[[g(x)]^2 - [f(x)]^2 \right] dx$$

Fonte: Elaborada pelo autor

4.12 Lição 12: fixando e complementando conceitos e procedimentos sobre o cálculo de volumes através das integrais

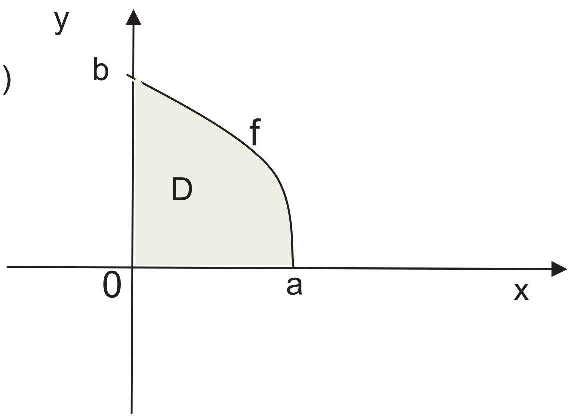
Através dos exemplos sistematizadores EC27 da Figura 85, pretendemos fortalecer importantes procedimentos e esclarecer quaisquer dúvidas ainda presentes no uso de integrais para calcular volumes.

Com os exemplos introdutórios e ampliadores do EC28 Figura 86 e EC29 da Figura 87 pretendemos desenvolver e fixar os procedimentos visto genericamente pelo EC27.

Figura 85 - Exercício complementar 27

EC27) Seja D a região plana sombreada. Escreva uma integral que represente o volume do sólido obtido em cada caso:

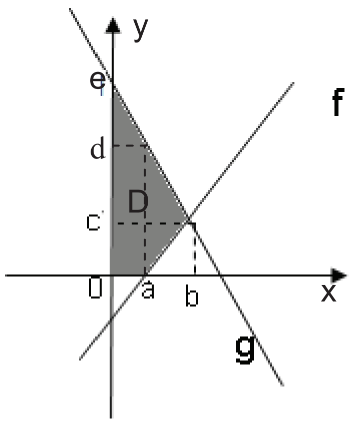
a)



I) Girando D em torno do eixo x:

II) Girando D em torno do eixo y.

b)



I) Girando D em torno do eixo y.

II) Girando D em torno do eixo x.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 86 - Exercício complementar 28

EC28 - Represente no sistema cartesiano a região D, limitada por $f(x) = -x + 2$, o eixo x e o eixo y.

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região D, em torno:

a) do eixo x	b) do eixo y
c) da reta x= -1	d) da reta x=3
e) da reta y=-1	f) da reta y=3

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 87 - Exercício complementar 29

EC29 - Faça a representação gráfica da região limitada por $y=x^2$, $x=3$ e o eixo x, em seguida calcule: a) O volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo x. b) O volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo y.

Fonte: Elaborada pelo autor

Através dos exemplos introdutórios e diagnosticadores EC30 da Figura 88 e EC31 da Figura 89, pretendemos verificar se ficou compreendido que nem todo sólido é obtido por rotação em torno de um eixo. Pretende com estes exemplos esclarecer que os sólidos obtidos por rotação compreendem uma aplicação do procedimento geral que adotamos na apresentação dos exemplos EC30 e EC31.

Figura 88 - Exercício complementar 30

EC30 - Um sólido S se estende ao longo do eixo x de $x=1$ até $x=3$. Para x entre 1 e 3, a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x é $3x^2$. a) Escreva uma integral que representa o volume de S. b) Qual o valor do volume do sólido S?

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 89 - Exercício complementar 31

EC31 - Encontre o volume do sólido cuja base é a região delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ cujas seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.

Fonte: Elaborada pelo autor

O EC32 da Figura 90 visa ampliar e sistematizar os procedimentos aprendidos. No exemplo desafiador EC33 da Figura 91, pretendemos que o aluno movimente recursos para representar a região não muito comum e após esta representação calcule o volume do sólido obtido. Com o exemplo sistematizador e desafiador EC34 da Figura 92, possibilitamos, primeiramente, um retorno aos procedimentos aplicados anteriormente e, consequentemente uma reflexão sobre estes procedimentos e conduzimos os alunos a uma organização mental, categorizando os exemplos, conforme os procedimentos adotados.

Figura 90 - Exercício complementar 32

EC32 - Qual o volume do sólido obtido pela rotação da região plana limitada abaixo por $y=x^2$, acima por $y=9$ e à esquerda pelo eixo y , girando em torno:
a) do eixo y; b) do eixo x; c) de $y= -1$ d) de $x= -1$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 91 - Exercício complementar 33

EC33 - Seja a região plana D, limitada por $y=x^{3/2}$, $y=1$ e $x=3$. Crie exemplos de sólidos rotacionando a região plana D, em torno de um eixo, de forma que:
a) A seção transversal ao eixo de rotação seja um disco;
b) A seção transversal ao eixo de rotação seja uma coroa circular.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 92 - Exercício complementar 34

EC34 - Entre os exercícios resolvidos:
a) Quais aqueles em que a seção transversal em relação ao eixo de rotação é um disco?
b) Quais aqueles em que a seção transversal em relação ao eixo de rotação é uma coroa circular?
c) Quais os que não são exemplos de sólidos de revolução.

Fonte: Elaborada pelo autor

No EC33, desafiamos os alunos a elaborar exemplos gerados pela rotação da região em torno de um eixo, formando sólidos, cujas seções perpendiculares aos eixos x e y são discos ou coroas circulares.

Finalizamos a Lição 12 com um exemplo sistematizador, desafiador e diagnosticador. Estes exemplos visam que através da reflexão o aluno seja levado a sistematizar os procedimentos aplicados em todos os exemplos, apontando entre eles os que são sólidos de rotação e os que não são; entre os de rotação, quais os que têm secção representando discos e quais representam coroa circular.

4.13 Avaliações

Apresentamos a seguir sugestões de avaliações (Figuras 93 e 94), abordando as primeiras ideias sobre integrais, integral indefinida, aplicação das técnicas de integração por substituição simples e integração por partes. Essas avaliações podem ser feitas em duplas ou individualmente, de acordo com o contexto em que é conduzido o trabalho.

Propomos ainda que ao final os alunos respondam a um questionário individual sobre o trabalho desenvolvido com o foco no uso de exemplos (Figura 95). Ao expor suas opiniões, os alunos estarão contribuindo para que alterações sejam feitas, possibilitando uma constante reelaboração e ampliação dos exemplos visando a aprendizagem do conteúdo de integrais de funções de uma variável real.

Figura 93 - Primeira avaliação

1) Sabemos que às vezes precisamos aplicar algumas técnicas para facilitar o cálculo de algumas integrais. Use a substituição simples e calcule as integrais

a) $\int 2\text{sen}(x).\cos(x)dx$.   b) $\int 3xe^{x^2}dx$

2) Responda as seguintes perguntas:
a) Descreva, em poucas linhas, os procedimentos que você usa para a aplicação da técnica da substituição simples.
b) Verifique se os procedimentos descritos anteriormente possibilitam a resolução das integrais, caso não seja possível, mude para a outra técnica estudada.

I) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x}dx$.   II) $\int x^3 \ln(x)dx$.

3) A aplicação das propriedades das integrais pode modificar a expressão, facilitando a resolução através do uso da tabela de integrais. Use as propriedades e consulte a tabela de integração para resolver as integrais indefinidas seguintes.

a) $\int \left[3x^5 + 3e^x - 3x^2 + 5\text{sen}(x) - 2\right]dx$ b) $\int \left[\frac{x^2}{3} - 2\cos(x) + \frac{3}{x} + 2\sec^2(x) - x\right]dx$

4) Muitas vezes, para calcular uma integral, precisamos transformar o integrando, usando identidades trigonométricas ou a fatoração do integrando. Faça as transformações necessárias e calcule as integrais seguintes:

a) $\int \frac{x.\cos^2(x)}{1+\text{cox}(2x)}dx$ (sugestão: $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$)

b) $\int \frac{1}{x^2-6x+9}dx$ (sugestão: fatoração do trinômio quadrado perfeito $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

5) Use seus conhecimentos e calcule as integrais apresentadas a seguir:

a) $\int \left(x^2 - \sqrt[3]{x}\right)dx$.   b) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.   c) $\int xe^{2x}dx$

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 94 - Segunda avaliação

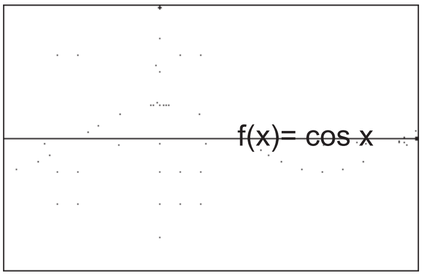
1) Aplicando o teorema fundamental do cálculo, calcule as integrais definidas:

a) $\int_{-1}^{2}\left[4x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x - 1\right]dx$ b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(3x)dx$

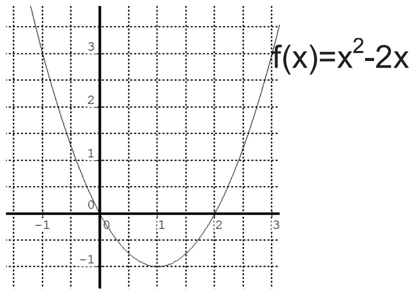
2) Algumas integrais definidas do tipo $\int_a^b f(x)dx$, representam a área sob a curva dada por f, acima do eixo x, entre x=a e x=b.

Veja as representações gráficas de algumas funções, calcule as integrais apontadas e verifique se as integrais calculadas correspondem a área.

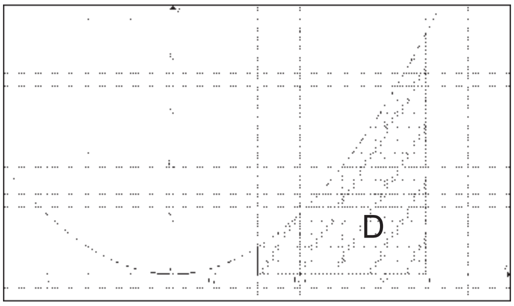
a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$



b) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$



3) A região D abaixo, está limitada pela função $f(x) = x^2$, eixo x, x= 1 e x=3. Calcule área da região D.



4) Baseando-se na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D, em torno do eixo x?

5) Com base ainda na representação gráfica da questão 3, qual o volume do sólido obtido pela rotação da região D em torno do eixo y?

(Sugestão: Separe a região em duas regiões usando y=1)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 95 - Questionário avaliativo

Prezados alunos, as questões que serão abordadas não influenciarão no resultado de sua avaliação. O objetivo das questões é avaliar o trabalho realizado durante este curso, possibilitando a você contribuir com sua opinião para uma possível melhora nas atividades e procedimentos. 1) Em relação aos procedimentos usados pelo professor, na exposição e aplicação das atividades desenvolvidas, você avalia em: ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Ótimo 2) Em relação às atividades elaboradas, como você avalia? a) Atividades comuns, normalmente trabalhadas por outros professores e não trouxeram grandes desafios. b) Atividades desafiaram os conhecimentos, possibilitando a abordagem de conceitos e procedimentos aprendidos. c) Atividades interessantes, mas, não me ajudaram no aprendizado. Aponte os motivos. 3) Em relação ao seu aprendizado, durante o curso desenvolvido com a metodologia e atividades propostas: a) Nada aprendi. b) Aprendi como poderia ter aprendido com qualquer outro método. c) Aprendi mais do que aprenderia com métodos já estudados. 4) Descreva uma atividade que foi desenvolvida durante o curso que chamou sua atenção, contribuindo para o seu aprendizado, aponte as características desta atividade. 5) Use o espaço abaixo para redigir qualquer comentário em relação ao trabalho desenvolvido, apontando pontos positivos e negativos.

Fonte: Elaborado pelo autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As “LIÇÕES PARA O ESTUDO DE INTEGRAIS” aqui apresentadas objetivaram promover situações de aprendizagem que possibilitem professores e alunos abordarem importantes temas que fundamentam os cursos de Engenharia e de outros cursos de graduação que têm o Cálculo Integral como parte importante do da formação matemática.

No desenvolvimento dessas lições percebemos a importância da preparação, planejamento e elaboração de um exemplo, refletindo sobre os objetivos que desejamos atingir. Não basta elaborar uma atividade que nos desperta atenção pela sua complexidade, ou nos atrai por qualquer motivo; nossa preocupação é desenvolver habilidades e procedimentos, refletindo sobre esses procedimentos a fim de promover discussões teóricas e práticas, criando estratégias de ensino que podem possibilitar a aprendizagem conceitual.

Esperamos que as lições, elaboradas de forma a enfatizar o uso de diferentes tipos de exemplos, tenham desempenhado o seu papel, provocando os desequilíbrios necessários à construção de conceitos e procedimentos para lidar com integrais, fornecendo meios para que os alunos compreendam o conteúdo de forma significativa. Esperamos ainda que as lições contribuam para outros pesquisadores, apontando possibilidades para a sua prática docente. Certamente as lições poderão ser melhoradas, incorporando novos exemplos, com o mesmo objetivo de incentivar o desenvolvimento de conhecimentos conceituais e procedimentais no ensino de Cálculo Integral.

REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, Carlos A.; CONTRERAS, Luis C.; BLANCO, Lorenzo J. A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. **Zetetiké,** Campinas, v. 17, n. 32, jul./dez., 2009.

FIGUEIREDO, Carlos A.; BLANCO, Lorenzo J. A; CONTRERAS, Luis C. A Exemplificação do conceito de função em quatro professores estagiários. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 8, Dec., p. 23 – 39, 2006.

HIEBERT, James; LEFEVRE, Patrícia. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). **Conceptual and procedural knowledge:** the case of mathematics. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erbaum, 1986, p.1-27.

PINTO, Gisele Teixeira Dias Costa. **Uma proposta para o ensino e aprendizagem de limite de função real**. 2010. 172 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

PORTER, Mary K.; MASINGILA, Joanna O. Examinig the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. **Educational Studies In Mathematics**, Netherlands, v.42, n. 2, p.165-177, mar., 2000.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics teaching**, London, v. 77, p. 20-26, 1976.

WATSON, An.; MASON, J. **Mathematics as a constructive activity**: learners generating examples. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, 2005. p.33-91.